

Discurs d'investidura pronunciat pel Dr. Jaume Gil

En aquests moments d'emoció profunda, ni puc ni he de renunciar al deure de manifestar el meu agraïment al rector, al degà de la Facultat de Ciències Econòmiques i Empresariales i al director del Departament d'Economia i Empresa per la iniciativa de demanar a la Junta de Govern de la Universitat Rovira i Virgili que es concedís a aquest humil però entusiasta professor una plaça entre els doctors d'aquest Claustre, de la saviesa dels quals són testimonis les mostres de reconeixement rebut en una vida tan curta, i el prestigi i el respecte que han sabut guanyar-se entre la comunitat científica internacional.

Permetin-me que dediqui només uns breus, brevíssims, instants a rememorar alguns episodis viscuts en temps ja remots. En primer lloc, apareix davant dels meus ulls la imatge d'un jove universitari postulant per una oportunitat d'exercir l'activitat docent, i la del meu primer mestre, el professor Mario Pifarré, feliçment entre nosaltres, allargant-me la mà per donar les fer passes en l'ensenyança i en la investigació universitària. El meu altre gran mestre, el professor Arnold Kaufmann, ha traspassat el llindar d'allò que és finit per assentar-se en l'eternitat. Després, més tard, ja catedràtic de la Universitat de Barcelona, vaig rebre emissaris amb l'encàrrec de fer palesa la necessitat sentida pels meus conciutadans de disposar d'uns ensenyaments d'economia. Finalment, aconseguit aquest primer objectiu, recordo els esforços realitzats per aquells que preteníem la creació d'una facultat digna d'aquestes terres, que són les meves. Actors d'aquells escenaris es troben avui presents en aquest acte. Considero just reconèixer que mereixen sentir-se orgullosos i satisfets dels esforços realitzats, de les decisions adoptades i dels resultats obtinguts.

Les immerescudes paraules d'elogi de qui m'apadrina en aquest acte, el Dr. Antoni Terceño, constitueixen l'eco d'una sentida amistat i del respecte mutu per l'obra realitzada. Hem tingut ocasió de treballar conjuntament, investigant en el camp de la matemàtica numèrica de la incertesa, i hem conegut la duresa i la solitud en què es troben aquells que cerquen una llum en les fosques tortuositats de les realitats econòmiques de la nostra societat. Potser

són aquestes les causes que podrien, d'alguna manera, justificar les seves lloances i fer-ne aleshores més passadora l'acceptació d'aquell que és conscient de la immensitat d'allò que desconeixem.

Malgrat això, i desitjós d'aportar encara que només sigui un minúscul gra de sorra de la gran platja del coneixement, m'atreveixo a proposar davant d'aquest fòrum una aportació modesta que desitjaríem que ajudés a la formulació de la teoria de les afinitats.

EL CONCEPTE D'AFINITAT EN EL NOU PARADIGMA DE LA TEORIA DE LA DECISIÓ

El declivi de les estabilitats

Des de fa un temps, els estudiosos de l'economia i gestió d'empreses intenten donar una orientació nova a llurs inquietuds per resoldre els greus problemes que els sistemes socials, econòmics i empresarials provoquen com a conseqüència de la situació d'incertesa característica de la nostra època. Irrompen, així, en els cenacles científics un bon nombre de propostes que, en diferents sentits, convergeixen a donar un tractament nou tant a plantejaments vells com a aquells que sorgeixen del complex entramat de relacions economicofinanceres.

Aflora, cada cop amb més força, la creença que el saber científic no ha d'explicar i tractar l'univers que ens agradaria viure, sinó aquell que vivim realment.¹ Això porta al convenciment de la necessitat de posar fi als coneixements "sagrats" de les lleis certes que descriuen un món estable i crear una nova racionalitat basada en la inestabilitat que condueix a la incertesa, encara que transgredir aquestes lleis exigeixi tornar a revisar els principis en què se sosté la ciència. Així mateix, és necessari trobar un llenguatge que permeti respondre les preguntes profundes que es plantegen en aquests darrers anys del mil·lenni.

Tradicionalment, la ciència occidental s'ha assentat durant molts segles en una idea, en ella mateixa, original: la idea de les lleis de la naturalesa. Segons aquesta idea, la natura està obligada a seguir certes regles que condueixen a estructures basades en la certesa. Això ja queda palès a les lleis de Newton i, curiosament, aquelles que s'han considerat grans revolucions del segle XX, la "mecànica quàntica" i la "relativitat", no han fet més que confir-

¹ Gil Aluja, J.: "La incertidumbre en la economía y gestión de empresas" Actas del IV Congreso de la Asociación Española sobre Tecnología i Lógica Fuzzy. Blanes, 14 de setembre 1994, p. 9-14.

mar aquesta visió. Malgrat això, cada cop resulta més patent que aquesta manera de concebre la ciència es troba en contradicció amb els fenòmens emergits de la realitat dels nostres dies, subjecta a un univers en evolució constant, la qual cosa concorda amb l'aspecte també evolutiu de l'ésser humà.

És necessari donar una bona explicació de l'univers i, com a conseqüència del fet que aquest univers és inestable, sorgeix la incertesa. Però fins i tot de la incertesa es poden extreure certs comportaments expressables, la majoria mitjançant possibilitats, alguns a través de probabilitats i molt pocs per la certesa.

Els sistemes econòmics, caracteritzats generalment per una espessa xarxa d'interconnexions, no s'escapen d'aquestes reflexions, i els canvis profunds en sentits no predeterminats fan mirar el futur embolicat amb un vel de nebulosa incertesa. Sembla arribat el moment del declivi de les estabilitats i de les seguretats.

Diferentment de tot allò que esdevenia en èpoques pretèrites, en les quals els esdeveniments es produïen d'una manera lenta i l'evolució es feia a través de períodes extensos en què la capacitat de reacció enfront dels canvis era pràcticament total, actualment l'activitat social es troba en ebullició permanent. I ha estat sobretot durant els darrers decennis quan els canvis han estat més importants, no només pel que fa als fets i als fenòmens, sinó també en els comportaments i en les idees. Així, valors tradicionals com la laboriositat, la perseverança, la paciència, que durant tants anys han constituït un tot monolític i una guia per als éssers immersos en una societat, han esclatat fets míques per ser substituïts per altres valors com l'audàcia, l'esperit competitiu... i ha aparegut allò que hem anomenat "regne de la imatge".

Estudis econòmics i realitats socials

Davant d'aquest context, sembla lícit preguntar-se com es pot concebre una activitat científica quan el pensament humà, carregat d'un alt grau de subjectivitat, intenta trobar, enmig de tant de canvi, l'objectivitat. Explicar els canvis i donar raó de les conseqüències d'aquestes mutacions ha despertat l'interès dels esperits més inquiets. Cal recordar la idea repetida amb tanta freqüència per François Perroux: "La ciència es desenvolupa a través de les necessitats de la realitat de cada moment i com a conseqüència seva", continuava, "les estructures socials actuen i condicionen el pensament econòmic". No ens ha d'estranyar, doncs, que l'estabilitat en el progrés dels coneixements econòmics hagi donat pas a l'eclosió d'idees noves que, en direccions molt diferenciades, pretenen donar resposta als nombrosos problemes que té plantejats la societat actual.

L'economia, potser la més jove entre les ciències socials, apareix tardanament i el pensament que gira al seu voltant s'estructura inicialment segons una matemàtica mecanicista entre 1880 i 1914 amb l'equilibri general (Walras, Pareto, Cournot, Edgeworth...). Davant d'una realitat la característica fonamental de la qual era una certa estabilitat en la vida social i en les relacions econòmiques, grups d'estudiosos intenten formalitzar els processos que hi esdevenen. S'utilitza la mecànica clàssica de Lagrange, cosa que fa una impressió de rigor enfront d'allò que Perroux anomenava el "laxisme del discurs econòmic". Però, en canvi, el pensament humà queda atrapat per unes lleis, que el porten indefectiblement cap a un futur predeterminat. Potser per això, la matemàtica del determinisme ha tingut un gran predicament, i ha imperat i continua imperant encara avui en molts àmbits de l'activitat científica en economia i gestió d'empreses.

Però com que s'han iniciat importants canvis en la societat, que tenen cada cop una major presència en el camp econòmic, s'alçaren certes veus clamant per una manera nova d'enfocar els problemes i subratllant la insuficiència de la matemàtica mecanicista per descriure la nova societat que emergeix. Aquest canvi radical s'inicia a partir de la Segona Guerra Mundial. Es renuncia a la figura de l'"home robot", el temps es considera irreversible, s'evita formalitzar el fatalisme de la predestinació donant a l'home oportunitat de triar lliurement el seu futur, un futur del qual és protagonista actiu i no mer engranatge d'una cadena predeterminada.

La situació actual, caracteritzada per uns canvis bruscos i inesperats en direccions molts cops contraposades, ens han dut, en els darrers anys, a replantejar un altra vegada l'ús de les tècniques emprades normalment per al tractament d'una realitat que, de tan canviant, s'ha convertit en incerta.

En aquest sentit, sembla convenient considerar, en primer lloc, un concepte: el de decisió, que, en l'àmbit de les ciències econòmiques, constitueix un dels termes més utilitzats. És evident que no es pot deslligar el concepte de decisió de l'estimació d'aquelles magnituds localitzades en el futur, que seran afectades per les conseqüències de la pròpia decisió. És ben conegut que, en els sistemes econòmics, hi tenen lloc tensions de naturalesa diversa, que provoquen importants problemes per a una assignació quantitativa adequada a les variables necessàries per l'absència d'una plataforma de futur amb l'estabilitat suficient per a la previsió de magnituds aptes per acotar convenientment el devenir dels esdeveniments.

Les dificultats de previsió i d'estimació, consubstancials a tot executiu, augmenten cada cop més com a conseqüència d'un clima recent d'incertesa.

Resulta evident que “els fets de la naturalesa són incerts; l’entorn econòmic, social, financer de les empreses canvia incessantment; els actes de l’home –perquè és lliure i dotat d’imaginació– com les relacions entre els homes perquè no som robots, són les causes profundes de la incertesa”.²

La nostra preocupació i l’obra que hem dut a terme s’encamina cap a posar de manifest que, en l’àmbit de l’economia i gestió d’empreses fins i tot sense poder mesurar de manera formal o mitjançant la probabilitat, també es pot aspirar a un comportament racional. L’intent de realitzar un tractament adequat dels problemes de la nostra societat exigeix certes reflexions³ al voltant de l’estudi de l’evolució històrica del pensament científic, el qual ha propiciat explicacions de diversa índole, i en moltes ocasions contraposades, relatives al fet que es produeixi una substitució de certes teories per unes altres. En aquest sentit, encara no s’ha apagat el ressò de la confrontació entre les posicions de Popper⁴ i Khun.⁵ Sense pretendre realitzar una anàlisi profunda d’aquest element fonamental per a tot investigador i ni tan sols prendre posició en el debat plantejat, sembla oportú assenyalar, en uns moments com els actuals en els quals la societat viu canvis profunds, que durant períodes llargs els treballs d’investigació realitzats en diferents esferes del coneixement han acceptat un cos bàsic de principis sobre els quals s’han elaborat unes teories, que han permès el desenvolupament de l’activitat científica.

Ara bé, l’esdevenir dels successos, d’una banda, i els nous enfocaments de la investigació, d’una altra, han evidenciat la dificultat de subministrar una explicació adequada a un elevat nombre de fenòmens, que han estat acumulats al “racó de les anomalies”. Però aquests racons s’han fet tan grans que han arribat a ocupar una part important de molts dels edificis que formen les diferents parcel·les del saber. S’ha arribat, així, al fet que aquests processos acumulatius han resultat insostenibles per a aquells que intenten donar resposta als problemes que els diversos estaments de la societat tenen plantejats.

² Barre, Raymond: Pròleg a l’obra de Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Ed. Hispano Europea. Barcelona, 1987.

³ Aquestes idees han estat exposades a Gil Aluja, J.: “Towards a new paradigm of investment selection in uncertainty”. *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 84, núm. 2, 9 desembre 1996, p. 187-197.

⁴ Popper, Karl: *La lógica de la investigación científica*. Ed. Tecnos. Madrid, 1971. La primera edició d’aquesta obra és del 1934 i hi inaugura la seva filosofia de la ciència, formulant la coneguda teoria de la falsabilitat.

⁵ Khun, Thomas: *La estructura de las revoluciones científicas*. Ed. Fondo de Cultura Económica. Madrid, 1981. Aquesta obra va ser escrita el 1962 i es tracta d’un dels molts treballs que l’autor ha dedicat a aquest tema.

Conjunts de regles (o supòsits) que han constituït el suport dels treballs d'investigació, universalment acceptades dins de les diferents àrees de coneixement, són qüestionades primer i substituïdes després per unes altres. Aquestes noves regles han donat lloc a canvis en els processos, dels quals hauran de sorgir models, tècniques, algorismes... susceptibles de donar les solucions que la comunitat científica reclama.

En l'àmbit de l'economia i la gestió d'empreses, s'han realitzat intents, creiem que aconseguits de manera parcial, de crear uns elements capaços d'arribar a un tractament adequat dels fenòmens que tenen lloc al si dels estats i de les empreses, quan el seu coneixement té lloc d'una manera poc precisa. Amb aquesta finalitat s'ha utilitzat la teoria dels errors, la dels intervals de confiança, la dels números difusos, dels subconjunts difusos i totes les generalitzacions proposades que ja hem utilitzat.⁶ La diferència amb el tractament realitzat en els esquemes tradicionals és important. Davant de la impossibilitat de recollir amb precisió la complexa i incerta realitat econòmica, es recorria a una simplificació inicial per realitzar els desenvolupaments posteriors segons aquests elements simplificadors. Les possibles desviacions inicials s'acumulaven i s'ampliaven a mesura que el procés operatiu avançava. Es perdia, a més, des del principi, una informació que ja no era possible de recuperar.

De la nostra banda, ens estíem més a recollir els fenòmens econòmics i de gestió amb la seva incertesa per realitzar els desenvolupaments pertinents conservant la imprecisió (i també tota la informació) per fer-la "caure" el més tard possible, ja que sempre és possible (perdent informació) reduir la incertesa.

Els diferents nivells del coneixement

De tots els treballs realitzats han sorgit elements nous que se situen en quatre esferes de coneixement diferents: lògica, matemàtica, investigació operativa i economia, i gestió d'empreses. En aquest sentit, i des d'una perspectiva de la lògica, "el principi del terç exclòs" apareix, junt amb uns altres, dominant el pensament investigador, que n'ha utilitzat un llenguatge matemàtic derivat i el màxim exponent del qual (però no l'exclusiu) ha tingut com a suport el sistema binari i la matemàtica mecanicista. La superació d'aquest principi i la substitució per un altre que hem denominat "principi de la simultaneïtat gradual", ha permès passar de "la" lògica boleana a "unes"

⁶ Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostel·la, 1986.

lògiques multivalents, entre les quals destaca la lògica difusa. A partir d'elles, es desenvolupa una matemàtica de la incertesa (aritmètica i matemàtica no numèrica difuses) que es presenta amb una nova axiomàtica, tan rigorosa com la que es troba en matemàtica determinista i en matemàtica de l'atzar. Seguint en aquesta línia d'anàlisi, no és difícil comprovar com a partir d'aquesta concepció del llenguatge matemàtic s'ha desenvolupat una metodologia de treball que ha donat com a fruit un conjunt de models de decisió, amb centenars i milers de variants.

En lloc del contingut de la investigació operativa tradicional, amb conceptes tals com rendibilitat, economicitat, productivitat... expressats mitjançant funcions cardinals, apareixen les nocions d'agrupació, assignació, comparació, afinitat, ordenació... que adquireixen, ara, un sentit nou. Aquest desplaçament és fonamental, per tal com significa el transvasament dels elements no aritmètics, en els estudis tradicionals considerats complementaris, fins a la plaça de privilegi que ocupen actualment, en allò que sembla un paradigma nou de la teoria de la decisió. Tot això que acabem d'assenyalar té com a finalitat plantejar certes reflexions⁷ sobre els canvis profunds que es produeixen a l'àmbit d'estudi del problema de la decisió en les empreses i institucions dels nostres dies. Creiem que, d'una manera quasi imperceptible però continuada, els investigadors van acceptant les noves bases sobre les quals s'assenten les modernes tècniques de decisió. Cal reconèixer, tanmateix, que no és fàcil el trànsit d'una situació en què la comunitat científica estava còmodament assentada a una altra que exigeix esforços d'adaptació notables, sense comptar el risc que implica emprendre un camí del qual encara es coneixen ben poques coses.

Dit tot això, convé posar en evidència des del principi que no tots els conceptes, mètodes i tècniques que s'utilitzen han nascut de manera espontània i súbita. Alguns fins i tot s'han utilitzat ja fa diverses dècades, encara que en uns altres contextos, i es poden trobar en obres que s'han considerat, de manera justa, textos clàssics. Potser ha estat la irrupció de la teoria dels subconjunts difusos l'espoleta que n'ha elevat el nivell d'interès i d'utilitat, fins a convertir-les en eix dels nous moviments relatius a la teoria de la decisió. La manca d'adequació entre models i realitats havia motivat que, en massa ocasions, es mutilessin a fi que cabessin dins dels models triats per al tractament. Aquesta pràctica, denunciada reiteradament per no pocs investigadors desitjosos d'una honestat més elevada en els treballs, ha format els

⁷ Gil Aluja, J.: "Spre o noua paradigma a teoriei deciziei". Discurs de recepció a l'Acadèmia Romanesa. 27 de setembre de 1995. *Revista Acadèmica*. Octubre, 1995, p. 20-21.

intents que cristal·litzen en aquest canvi conceptual, metodològic i d'objectius tan profund.⁸

Efectivament, el camí cap al coneixement seguit en els treballs d'investigació clàssics parteix, o bé d'una estimació en termes precisos o bé a través de lleis de probabilitat,⁹ d'un nombre determinat de magnituds. Aquestes "dades" s'incorporen o bé als models i a la utilització d'algoritmes adequats elaborats segons l'aritmètica determinista o bé al càlcul de probabilitats, la qual cosa permet l'obtenció d'uns resultats numèrics objectius, és a dir, d'unes "mesures". Amb el canvi de paradigma facilitat per la societat nova sorgida de la incertesa, el camí cap al coneixement ja no parteix de l'estimació de les magnituds futures en termes de certesa o probabilitat, sinó de la percepció d'elements inherents o circumdants al procés que s'estudia, el caràcter del qual no és principalment mesurable. És a partir d'aquest canvi quan les frustracions i inquietuds de tants estudiosos dels problemes de gestió sembla que trobin una sortida amb aires de transformació autèntica cap a formes de coneixement noves, molt més coincidents amb les necessitats actuals i previsiblement futures.

Ara bé, tot això que ha estat exposat no ha d'induir a la creença falsa de la inutilitat dels models basats en els instruments sorgits a redós dels paradigmes clàssics. És més, els avenços indubtables que en llur aplicació s'han produït en els darrers anys han permès un perfeccionament dels estudis quantitius dirigits al tractament dels fenòmens de decisió, i, així, han resultat vàlids aquells esquemes, afortunadament en moltes ocasions. Només quan no és possible honestament considerar estimacions "numèriques", s'ha de recórrer a principis i maneres d'actuació diferents. Però, en un món convulsionat com el dels nostres dies, no sembla que la incertesa hagi de remetre, i únicament convivint-hi serà fàcil l'acceptació de regles noves.

Primeres passes cap a processos d'agrupació

Ara bé, replantejar els elements bàsics de la teoria de la decisió (o, si voleu, teories de la decisió) comunament acceptada(es) fins ara, comporta dotar la que la(les) substituirà de tot un conjunt de conceptes, mètodes i algoritmes capaços d'explicar i tractar els més diversos aspectes en els quals

⁸ Gil Aluja, J.: "Les approches connexionnistes dans le changement du paradigme de la théorie de la décision". 3ème Rencontre Internationale ACSEG. Nantes, 25 d'octubre de 1996.

⁹ Observeu la si més no aparent contradicció que hi ha entre la utilització del terme probabilitat (fins i tot en el cas que es tractés d'una probabilitat subjectiva) amb la seva estricta axiomàtica i l'estimació de magnituds econòmiques que s'espera que apareguin en períodes posteriors.

apareix la voluntat humana de triar entre diverses alternatives. I, per donar una "explicació" adequada, és requisit previ aclarir la realitat que es pretén conèixer, normalment formada per un nombre més o menys elevat però, en tot cas, plural d'esdeveniments, sobre els quals ha de recaure o pot recaure l'acte decisorí. Efectivament, és habitual constatar en el camí cap a l'elecció, l'existència de diversos esdeveniments o objectes que, per les seves qualitats o per les seves característiques, són indiferents al subjecte que ha de prendre la decisió. Quan s'esdevé això, és possible la formació d'un o de diversos grups en el si de cada un dels quals els elements gaudiran de la mateixa estimació, mentre que aquesta serà diferent quan passi d'un grup a un altre. Amb aquesta finalitat, l'agrupació ha de ser de tal naturalesa que permeti, a més de reunir homogèniament esdeveniments o objectes, establir una estructura adequada per a una ordenació coincident amb els objectius que es persegueixen.

Davant de plantejaments d'aquesta naturalesa, no pot estranyar que l'agrupació homogènia d'objectes (entesa aquesta paraula en el seu sentit més ampli d'objectes físics o mentals), intentant recollir-ne en cada grup el nombre més elevat possible, compatible amb certes exigències establertes prèviament, hagi estat un dels plantejaments més freqüents en l'àmbit de les ciències socials. Sent aquest problema molt habitual en el tractament dels fenòmens econòmics i de gestió, el seu interès sobrepassa els límits estrictes d'aquesta àrea del coneixement per assentar-se en les diverses branques de les ciències aplicades. Potser per això s'està comprovant un augment en l'interès dels matemàtics, sobretot en aquells que estudien la creació de tècniques operatives, cercant models i algorismes capaços de representar una solució que sigui tan general com sigui possible.

Els intents realitzats en aquest sentit en els darrers anys han estat múltiples i variats. Tant és així que seria tan complex com innecessari l'intent de realitzar-ne una descripció detallada. Però, en canvi, pot adquirir un cert interès presentar, encara que sigui a títol d'exemple representatiu, un dels camins utilitzats en els treballs més recents. Ens referim a aquell que se sosté en les nocions de "semblança" i "similitud". El plantejament és, en si mateix, senzill. Es tracta de compondre una matriu de semblança (matriu booleana quadrada, simètrica i reflexiva) en la qual els objectes, elements a la vegada de les files i de les columnes, posseeixin o no l'homogeneïtat desitjada (un u o un zero en la casella que correspongui) considerats de dos en dos. Aquesta matriu per ella sola no permet l'agrupació de més de dos objectes (elements), ja que la noció de semblança no posseeix la propietat transitiva. Es fa neces-

sari, doncs, recórrer a algun procediment a partir del qual sigui possible reunir els objectes (elements) en grups per als quals existeixi transitivitat.

Apareixen, així, alguns algorismes a partir dels quals s'obtenen unes subrelacions màximes (recullen el major nombre possible d'objectes) que per bé que són transitives no són, en canvi, disjunctes. Afortunadament, aquesta característica resulta supèrflua en una gamma variada de problemes. Aquestes agrupacions es coneixen amb el nom de subrelacions màximes de similitud.

Volem subratllar un aspecte important del procés descrit. Es tracta del fet de partir, per obtenir aquestes subrelacions màximes, d'una matriu quadrada, simètrica i reflexiva, supòsit evidentment particular d'allò que passaria en el cas que consideréssim una matriu rectangular (sense exigències de reflexivitat ni de simetria). Si aconseguíssim els objectius amb relacions rectangulars, el resultat seria una generalització que tindria, com un dels seus casos particulars, la matriu de semblança i, per tant, englobaria els estudis realitzats fins aquest moment.

No ocultarem els nostres propòsits dirigits en aquest sentit. Però abans d'abordar aquest tema, potser seria convenient plantejar-se una qüestió prèvia relativa a la manera de construir la matriu representativa de les relacions de semblança. És evident que les plataformes de partida són diferents segons el context d'incertesa en què tingui lloc l'agrupació. Si, com és la nostra convicció, es considera un ambient d'incertesa, no és difícil d'imaginar com a idònia una representació de cada objecte mitjançant un subconjunt difús el referencial del qual és format per les característiques o qualitats que configuren els aspectes definidors de l'homogeneïtat cercada. Això comporta l'establiment de dos conjunts referencials, el de característiques o qualitats:

$$C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

I el d'objectes:

$$P = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$$

Tenim, així, per a cada objecte P_j , $j = 1, 2, \dots, m$:

$$P_j = \begin{array}{ccccccc} & C_1 & C_2 & C_3 & & & C_n \\ \mu_j^{(i)} & \mu_1^{(i)} & \mu_2^{(i)} & \mu_3^{(i)} & \dots & \dots & \mu_n^{(i)} \end{array}$$

Suposadament coneguts aquests subconjunts difusos, es troba la distància relativa (per exemple la de Hamming) entre cadascun d'ells i els altres, de manera que donats dos subconjunts qualssevol P_i i P_k , s'obté la distància segons la coneguda expressió:

$$\delta(P_i, P_k) = \frac{\delta(P_i, P_k)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n |\mu_s^{(i)} - \mu_s^{(k)}|$$

En la qual n és el nombre d'elements de conjunt referencial C.

Evidentment, per a $\delta(P_i, P_k)$, que a partir d'ara designarem per δ_{ik} , es compleix:

$$0 \leq \delta_{ik} \leq 1, i \neq k$$

$$\delta_{ik} = 0, i = k$$

La matriu obtinguda si reunim totes les distàncies $[\delta]$ es coneix amb el nom de "matriu de dessemblança", posseeix les propietats de simetria i d'antireflexibilitat i pot ser representada de la manera següent:

	P_1	P_2	P_3		P_m
P_1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}		δ_{1m}
P_2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}		δ_{2m}
P_3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}		δ_{3m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_m	δ_{m1}	δ_{m2}	δ_{m3}		δ_{mm}

Per trobar la "matriu de semblança" n'hi haurà prou obtenint, per a cada element de $[\delta]$ el seu complement a la unitat, és a dir:

$$d_{ik} = 1 - \delta_{ik}$$

Per la seva naturalesa i per la seva construcció, la matriu $[d]$ formada pels elements d_{ik} , $i, k = 1, 2, \dots, m$, és quadrada, simètrica i reflexiva. I ja que es compleix: $d_{ik} \in [0,1]$, pot ser considerada com una relació de semblança difusa.

El trànsit d'una relació difusa a una matriu booleana —recordem el punt de partida per a l'obtenció de subrelacions màximes de similitud— exigeix la consideració d'un llindar únic $\alpha \in [0,1]$ per a cada matriu booleana, encara que, com veurem seguidament, també hi ha una possibilitat d'establir tants llindars com nivells d'homogeneïtat siguin necessaris. Aquests llindars tenen un paper filtrador que permet separar les relacions considerades homogènies de les que no ho són, és a dir, de les que assoleixen o no el nivell que s'exigeix. Amb aquesta finalitat s'estableix que si $d_{ik} \geq \alpha$ en la casella corresponent a la matriu booleana $[B]$, se li assigna el valor $\beta_{ik} = 1$, mentre que quan $d_{ik} < \alpha$ el valor assignat és $\beta_{ik} = 0$. És a partir de la matriu $[B]$ quan s'inicien els algorismes destinats a obtenir les subrelacions màximes de similitud.

Encarim el fet de prestar atenció a la necessitat de considerar un sol llindar per a totes les relacions, la qual cosa constitueix una evident restricció i simplificació que limita la flexibilitat dels models basats en aquest procés. Efectivament, quan fem intervenir el llindar després d'haver obtingut les distàncies, són precisament aquestes distàncies les que marquen el nivell d'homogeneïtat que existeix en relació amb allò que exigim. I, com que la distància tal com ha estat calculada és una suma aritmètica de diferències en valors absoluts, sense que en cada característica s'assigni un pes diferent als altres, queda palesa la idèntica estimació de totes les característiques definidores de l'homogeneïtat. Ens trobem, així, davant d'una nova particularitat que hauria d'estar inclosa com a cas concret d'un procés més general. És evident que hi ha mitjans per evitar aquesta crítica, actuant en l'obtenció de distàncies. Efectivament, si es realitza una ponderació convexa de les diferències en valor absolut, podrien ser ressaltades (augmentades) les diferències existents en certs criteris en relació amb uns altres. No deixa de ser un artífici que, tanmateix, permet una sortida flexibilitzadora del model.

Arribats a aquest punt, seria possible continuar aquesta exposició descrivint un o diversos algorismes¹⁰ elaborats per trobar les subrelacions màximes de similitud. Preferim, tanmateix, passar a la formulació d'uns altres elements capaços, creiem, de configurar una generalització del concepte de similitud que avui és conegut amb la denominació d'"afinitat".

Concepte i contingut d'afinitats

La paraula afinitat sorgeix arran d'una ponència que vam presentar junt amb el professor Kaufmann¹¹ en el IX Congrés Europeu d'Investigació Operativa, recollida i ampliada posteriorment en uns altres treballs.¹² Creiem necessari ara fer-ne la definició.

Definim les afinitats com aquelles agrupacions homogènies a determinats nivells, estructurades ordenadament, que lliguen elements de dos conjunts de naturalesa diferent, relacionats per l'essència dels fenòmens que representen.

¹⁰ Vegeu, per exemple, Pichat, E.: *Algorithm for Finding the Maximal Elements of a Finite Universal Algebra Inform Processing* 68. Publ. North Holland, 1969.

¹¹ Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: "Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois lattices", *Actas del Euro XI Congress O.R. Aachen* del 16 al 19 de juliol de 1991.

¹² Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid, 1992, capítol 10.
Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostel·la, 1993, capítol 13.

Es pot observar l'existència de tres aspectes configuradors del concepte d'afinitat. El primer fa referència al fet que l'homogeneïtat de cada agrupació està lligada al nivell triat, de tal manera que segons l'exigència de cada característica (elements d'un dels conjunts) s'assignarà un nivell més o menys elevat que defineix el llindar a partir del qual existeix homogeneïtat. El segon expressa la necessitat que els elements de cada un dels conjunts estiguin lligats entre si per certes regles de la naturalesa en uns casos o per la voluntat humana en d'altres. El tercer exigeix la construcció d'una estructura constitutiva d'un cert ordre que permeti la decisió posterior.

La finalitat de l'agrupació, d'una banda, i el tipus i la força de la relació entre els elements de tots dos conjunts, de l'altra, determinaran de manera inequívoca, a partir de certes propietats que estudiarem, totes les agrupacions possibles. Un cop especificat l'objectiu que volem assolir és imperatiu fixar un procés que permeti assolir els resultats desitjats. Amb aquesta finalitat s'utilitzen certs elements derivats de l'anàlisi combinatòria i dels estudis reticulars.

Assenyalarem ara, un cop més, que, a diferència de la noció de semblança en la qual la relació té lloc entre elements d'un mateix conjunt i d'aquí la seva representació mitjançant matrius quadrades definides en $E \times E$, la noció d'afinitat permet relacionar els elements d'un conjunt amb els elements d'un altre, la qual cosa queda representada a partir de masses rectangulars definides a $E_1 \times E_2$. L'obtenció de subrelacions màximes consisteix en allò que els matemàtics anomenen obtenció d'una "cobertura" de la relació $R \subset E_1 \times E_2$. Es podrà comprovar que les subrelacions d'aquesta cobertura formen un reticle de Galois.

Seguint la mateixa terminologia de l'epígraf anterior, anomenarem els conjunts E_1 i E_2 respectivament P i C per aclarir, d'aquesta manera, tant com sigui possible, el tracte diferent donat en l'estudi a partir de la noció de semblança, comparat amb el que proposem, el qual desembocarà en les relacions d'afinitat. Iniciem, doncs, el nostre procés a partir dels subconjunts difusos P_j , $j = 1, 2, \dots, m$:

$$P_j = \begin{array}{c} C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad \dots \quad C_n \\ \mu_1^{(j)} \quad \mu_2^{(j)} \quad \mu_3^{(j)} \quad \dots \quad \mu_n^{(j)} \end{array}, \quad 0 \leq \mu_i^{(j)} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Aquests subconjunts difusos poden ser reunits formant una relació difusa $[R]$, tal com:

	C_1	C_2	C_3		C_n
P_1	$\mu_1^{(1)}$	$\mu_2^{(1)}$	$\mu_3^{(1)}$		$\mu_n^{(1)}$
P_2	$\mu_1^{(2)}$	$\mu_2^{(2)}$	$\mu_3^{(2)}$		$\mu_n^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_n	$\mu_1^{(m)}$	$\mu_2^{(m)}$	$\mu_3^{(m)}$		$\mu_n^{(m)}$

[R] =

En la qual, com és conegut, $0 \leq \mu_i^{(j)} \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

A fi d'establir el grau mínim a partir del qual es considera que hi ha homogeneïtat, per a cada element del conjunt C (característiques) C_i , $i = 1, 2, \dots, n$, es determina un límit o llindar. Per tant, als valors $\mu_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$, que compleixin $\mu_i^{(j)} \geq \theta_i$ se'ls assignarà en una matriu nova [B], valors per als seus elements $\beta_i^{(j)}$ iguals a 1, mentre que quan sigui $\mu_i^{(j)} < \theta_i$, es farà $\beta_i^{(j)}$ igual a zero. Els θ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ constitueixen els llindars a partir dels quals es considera que existeix la desitjada homogeneïtat per a cada element del conjunt C. Es podria fer el mateix agafant com a base el conjunt P, si la naturalesa del problema tractat ho exigís així.

Aquí apareix el primer dels aspectes generalitzadors en relació amb els esquemes basats en l'obtenció de distàncies, ja que la matriu booleana resultant [B] duu en si mateixa uns nivells dels valors de la funció característica de pertinença $\mu_i^{(j)}$, diferents, per a cada C_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Serà:

	C_1	C_2	C_3		C_n
P_1	$\beta_1^{(1)}$	$\beta_2^{(1)}$	$\beta_3^{(1)}$		$\beta_n^{(1)}$
P_2	$\beta_1^{(2)}$	$\beta_2^{(2)}$	$\beta_3^{(2)}$		$\beta_n^{(2)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
P_m	$\beta_1^{(m)}$	$\beta_2^{(m)}$	$\beta_3^{(m)}$		$\beta_n^{(m)}$

[B] =

On, evidentment, $\beta_i^{(j)} = \{0, 1\}$.

A partir de la matriu [B] és possible trobar les relacions d'afinitat, als nivells θ_i escollits. Amb aquesta finalitat hem elaborat un algorisme que pot ser resumit en les etapes següents:

1. Elecció entre E_1 i E_2 , és a dir, entre P i C, del conjunt que té un menor nombre d'elements.
2. Construcció del conjunt $\Pi(E_i)$ (si és E_i l'escollit) de totes les seves parts, és a dir el seu "power set".
3. Obtenció de la "connexió a la dreta", B^+ , és a dir, que per a tot $A \in \Pi(E_i)$, B^+ recollirà els successors de tots els elements que pertanyen a A.
4. Es tria per a tot conjunt no buit de B^+ el corresponent de A que tingui un major nombre d'elements.

5. Les relacions obtingudes formen un reticle de Galois que permet una perfecta estructuració i ordenació de totes les afinitats possibles.

L'operativitat d'aquest algoritme se sosté en un nombre determinat de propietats de l'anàlisi combinatòria, recollides en certs desenvolupaments coneguts com famílies de Moore. Passem tot seguit a justificar la utilització dels elements configuradors del procediments proposat. Amb aquesta finalitat simplifiquem al màxim possible els símbols emprats, de tal manera que si se suposa com a conjunt amb menys elements el $E_1 = P$, aquests elements es designen amb lletres minúscules $a, b, c, \dots, r, i$, per tant:

$$E_1 = \{a, b, \dots, r\}$$

Mentre que per a l'altre conjunt $E_2 = C$, els seus elements seran representats per lletres majúscules $A, B, C, \dots, S$. Així, doncs:

$$E_2 = \{A, B, \dots, S\}$$

Pretenem amb això no enterbolir amb subíndex i superíndex una exposició que pretén facilitar la comprensió de l'algoritme.

Suports bàsics en l'obtenció d'afinitats

Considerarem, en primer lloc, el concepte power set. Donat un conjunt finit E_1 es designa com el seu conjunt més potent (power set), $\Pi(E_1)$, aquell que està format per totes les combinacions possibles dels seus elements agafats d'1 en 1, de 2 en 2, ..., de m en m , si m és un cardinal.

Passem, tot seguit, a definir una família de Moore.

Sigui una família de $\Pi(E_1)$, $F(E_1)$, que, per tant: $F(E_1) \subset \Pi(E_1)$

Si $F(E_1)$ verifica:

1. $E_1 \subset F(E_1)$

2. La intersecció d'un nombre de parts de $\Pi(E_1)$ que pertanyen a $F(E_1)$, pertany també a $F(E_1)$. S'escriu:

$$(A \in F(E_1), B \in F(E_1)) \Rightarrow (A \cap B \in F(E_1))$$

Llavors $F(E_1)$ és una "família de Moore".

Considerem ara una aplicació funcional M de $\Pi(E_1)$ en $\Pi(E_1)$, de tal manera que per a tots els components de la part A de $\Pi(E_1)$, en llur aplicació funcional MA apareixen aquests components (a més d'uns altres si s'escau). Aquesta és una condició necessària perquè es pugui parlar de "tancament de Moore", però n'hi ha uns altres dos.

En efecte, matemàticament, es diu que existeix "tancament de Moore" si es compleix les propietats d'extensivitat, idempotència i isotonia.

a) Extensivitat

$$\forall A \in \Pi(E_1) : A \subset MA$$

b) Idempotència

$$\forall A \in \Pi(E_1) : M(MA) = A$$

c) Isotonia

$$\forall A, B \in \Pi(E_1) : (A \subset B) \Rightarrow (MA \subset MB)$$

El tancament de Moore és una aplicació funcional en la qual es fa correspondre a tots els components del subconjunt (o part d'ell) $A \subset E_1$ una MA de tal manera que:

$$MA = \bigcap_{F \in F_A(E_1)} F$$

On $F_A(E_1)$ representa el subconjunt dels elements de $F(E_1)$ que contenen A i F tots els elements de $F_A(E_1)$.

A partir d'una família de Moore es pot construir un tancament de Moore. Vegem-ne les propietats més interessants:

1. Els elements de $\Pi(E_1)$ que són imatge d'un altre element són també imatge del seu. Aquests elements s'anomenen "tancats".
2. El subconjunt $F(E_1)$ dels tancats d'un tancament de Moore és una família de Moore.
3. La imatge de qualsevol element $A \in P(E_1)$ és el tancat més petit que el conté.

Tot això que acabem d'exposar permet passar a la consideració del tancament de Moore d'un graf difús. Com ja sabem, tot graf difús pot ser representat, entre d'altres, mitjançant la forma sagitada i la forma matricial. Donada la forma matricial, n'és possible l'anàlisi a través dels α -talls (diferents nivells).

Així, una relació difusa $[R]$, quan és descomposta, per un sistema qualsevol, per exemple l'hendecandari, dona lloc a 11 matrius booleanes $[R_{\alpha=0}]$, $[R_{\alpha=0.1}]$, $[R_{\alpha=0.2}]$, ..., $[R_{\alpha=0.9}]$, $[R_{\alpha=1}]$. Normalment es tria un nivell determinat α per a cada columna de la matriu $[R]$ (també fóra possible fer-ho per fileres). En qualsevol d'aquests supòsits el resultat és una matriu booleana que hem representat per $[B]$.

S'anomena connexió a la dreta B^+ el subconjunt d'elements de E_1 tals que per a tot $A \in \Pi(E_1)$, les B^+ són els successors de tots els elements que pertanyen a A . S'escriu:

$$\forall x \in A : B^+A = \{y \in E_1 / (x, y) \in [B]\}, \text{ on } B^+ \emptyset = E$$

S'anomena connexió a l'esquerra B^- el subconjunt d'elements de E_1 tals que per a tota $A \in \Pi(E_1)$, les B^- són els predecessors de tots els elements que pertanyen a A . Serà:

$\forall x \in A : B^- A = \{y \in E_1 / (y, x) \in [B]\}$, en donde $B^- \emptyset = E$

A partir de les definicions de connexió a la dreta i connexió a l'esquerra, sorgeixen les propietats següents:

$\forall x \in A \in \Pi(E_1) :$

$$B^+ A = \bigcap_{x \in A} B^+ \{x\}$$

$$B^- A = \bigcap_{x \in A} B^- \{x\}$$

Això permet trobar, de manera visual, directament B^+ i B^- per les interseccions respectivament de tots els elements de les corresponents fileres i de les columnes de la matriu booleana $[B]$.

Donats B^+ i B^- i procedents d'una relació difusa $[R]$ s'obtenen els tancaments de Moore de $\Pi(E_1)$ de la manera següent:

$$M^{(1)} = B^- \circ B^+, M^{(2)} = B^+ \circ B^-$$

On $\circ$ és la composició maxmin.

Vegem ara la significació de B^+ i B^- en relació amb els processos d'agrupació. L'obtenció de la connexió a la dreta B^+ posa en evidència els grups que es poden formar del conjunt $E_1 = P$ segons reuneixin un o més elements del conjunt $E_2 = C$. En aquesta fase del procés es dona el fet que una mateixa agrupació d'elements del conjunt E_1 pot reunir un grup d'elements diferents corresponents al conjunt E_2 i quan s'esdevé això, sempre hi ha una agrupació d'elements de E_2 que comprèn les altres. És necessari, doncs, seguir el camí amb l'obtenció de B^- . La connexió a l'esquerra B^- posa de manifest l'agrupació d'elements de $E_2 = C$ que concorren en un o més elements de $E_1 = P$. També a B^- té lloc el fenomen d'existir per a un mateix grup d'elements de E_2 diverses agrupacions diferents d'elements de E_1 , així com el fet que sempre hi ha un grup d'elements de E_1 que comprèn els altres. S'imposa, doncs, l'obtenció dels tancaments de Moore a través de les corresponents convolucions maxmin.

El tancament de Moore $M^{(2)} = B^+ \circ B^-$ permet determinar les connexions que existeixen entre els elements power set del referencial E_2 i fa intervenir com a mitjancers els elements del power set del referencial E_1 . Aquest tancament posa de manifest el grup més ampli del qual formen part tots els elements del power set del referencial E_2 . En unes altres paraules, la relació que existeix entre tot grup possible d'elements de E_2 i el grup més gran del qual formen part, tenint en compte els elements de E_1 . Això dona lloc a alguns "tancats" i pel que fa al cas és interessant subratllar que la imatge de qualsevol element power set de E_2 és el tancat més petit que el conté (tercera propietat enunciada). D'altra banda, quan en un "tancat" conflueixen diversos

elements, sempre n'existeix un que és la pròpia imatge. Doncs bé, l'agrupació ve representada precisament per aquesta imatge. Cadascun d'aquests grups comporta el suport d'un o més elements de E_2 reunits, que ho són a través d'algun o alguns d'ells. Els dos casos extrems $\emptyset$ i E_2 adquireixen un sentit teòric de "cap agrupació", i "tots els elements agrupats".

El tancament de Moore $M^{(1)} = B^- \circ B^+$ posa de manifest les connexions que existeixen entre si i que corresponen als elements power set del referencial E_1 quan intervenen com a elements intermediaris els del power set de E_2 . Aquest tancament de Moore posa de manifest les agrupacions d'elements de E_1 que es poden realitzar tenint en compte els elements de E_2 , de tal manera que segons quins són els requerits es té una o una altra agrupació. Els "tancats" existents, junt amb els elements l'única correspondència dels quals és la seva pròpia imatge, proporcionen totes les agrupacions possibles dels elements de E_1 .

Resulta molt interessant, un cop obtingudes aquestes agrupacions de E_1 , conèixer quins són els elements de E_2 que se'ls pot associar a cadascuna. Fins i tot quan amb aquesta finalitat es pot recórrer al procés de composició maxmin, resulta molt significatiu aprofitar la propietat segons la qual les famílies de Moore que resulten de composicions $B^- \circ B^+$ i $B^+ \circ B^-$ constitueixen reticles isomorfs.¹³ Efectivament, les famílies que resulten dels tancaments de Moore¹⁴ tenen el mateix nombre d'elements (tenen el mateix cardinal per a $M^{(1)}$ i per a $M^{(2)}$). Així mateix, a tot element de $M^{(1)}$ n'hi correspon un de sol de $M^{(2)}$. D'aquesta manera, en la formació de grups els elements de E_1 són acompanyats dels elements de E_2 relacionats amb ells. I aquí arriba una propietat fonamental per a les afinitats: si unim adequadament els reticles isomorfs, s'observa que, quan passem d'unes agrupacions a unes altres, en el moment en què augmenten els elements d'un dels conjunts, disminueixen els de l'altre. Per aconseguir una ordenació i una estructuració perfectes d'aquestes agrupacions hem recorregut al suport d'un tipus de reticle que uneix una gran elegància de construcció a la seva senzillesa. Ens referim als reticles de Galois.

Ordenació i estructuració de les afinitats

Entre les nombroses composicions reticulars n'hi ha una que permet representar en un sol esquema gràfic l'isomorfisme de les convolucions $B^- \circ B^+$ i $B^+ \circ B^-$. Es tracta, en definitiva, de col·locar un al damunt de l'altre els reticles isomorfs convertint-los en un de sol. A cada vèrtex del reticle únic

¹³ Pel que fa al cas, podeu consultar Dubreil, P.: *Leçons d'algèbre moderne*. Ed. Dunod. París, 1964, p. 177 i següents.

¹⁴ Com ja és sabut, tot tancament de Moore és una família de Moore.

s'hi adscriuen tant els elements agrupats de E_1 com els elements agrupats de E_2 . Aleshores, sorgeix una propietat summament important:

A mesura que té lloc un desplaçament des del vèrtex $(\emptyset, E_1)$ al $(E_2, \emptyset)$ o viceversa, augmenta el nombre d'elements agrupats d'un conjunt i disminueix el de l'altre.

Això permet una visió de conjunt molt apreciable per a una presa de decisions eficaç, i són precisament els reticles de Galois els que tenen aquest requisit.

Efectivament, si es consideren els dos referencials finits E_1 i E_2 els seus corresponents power set $\Pi(E_1)$ i $\Pi(E_2)$, es poden establir les dues següents relacions d'ordre:

Primera

$$\forall X, X' \in \Pi(E_1), \forall Y, Y' \in \Pi(E_2): \\ ((X, Y) \leq (X', Y')) \Leftrightarrow (X \subset X', Y \supset Y')$$

En la qual s'introdueix, a partir d'aquesta relació d'ordre, el límit o extrem superior, que serà representat per $(X, Y) \nabla (X', Y')$.

Segona

$$\forall X, X' \in \Pi(E_1), \forall Y, Y' \in \Pi(E_2): \\ ((X, Y) \geq (X', Y')) \Leftrightarrow (X \supset X', Y \subset Y')$$

En aquesta, s'hi incorpora, a partir d'aquesta mateixa relació d'ordre, el límit o extrem inferior, que estarà representat per $(X, Y) \Delta (X', Y')$.

Es tracta de la relació oposada o, si es vol, complementària.

Si continuem considerant $(\emptyset, E_1)$ Com a extrem superior de la relació primera i inferior de la segona i $(E_2, \emptyset)$ com a extrem superior de la relació segona i inferior de la primera, es verifiquen les propietats següents:

N'enunciarem la primera:

$$(U, V) = (X, Y) \nabla (X', Y') \\ \Rightarrow (U \supset X \cup X' \text{ i } V \supset Y \cap Y')$$

Vegem-ne la segona:

$$(Z, T) = (X, Y) \Delta (X', Y') \\ \Rightarrow (Z \subset X \cap X' \text{ i } T \supset Y \cup Y')$$

Aquestes dues propietats configuren un reticle de Galois.

A fi de donar una visió clara d'aquesta part del procés, representarem dos reticles isomorfs sorgits d'uns tancaments de Moore a partir dels referencials:

$$E_1 = \{a, b, c\}$$

$$E_2 = \{A, B, C, D\}$$

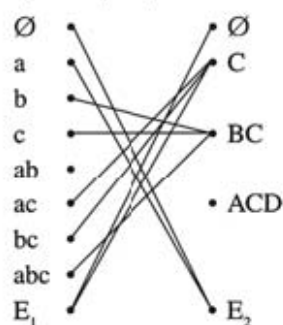
Si se suposen unes relacions expressades per la matriu booleana següent:

		$\nearrow$	A	B	C	D
[B] =	a		1		1	1
	b			1	1	
	c			1	1	

A partir del power set de E_1 i seguint l'algoritme descrit, s'obté:

$\emptyset$	•	• E_2	*
a	•	• ACD	*
b	•	• BC	
c	•	• BC	
ab	•	• C	
ac	•	• C	
bc	•	• BC	*
abc	•	• C	*
E_1	•	• $\emptyset$	*

Que es pot presentar de la manera següent:



Les agrupacions relatives al conjunt E_1 són:

$\emptyset$, a, bc, abc, E_1

I les corresponents a E_2 :

$\emptyset$, C, BC, ACD, E_2

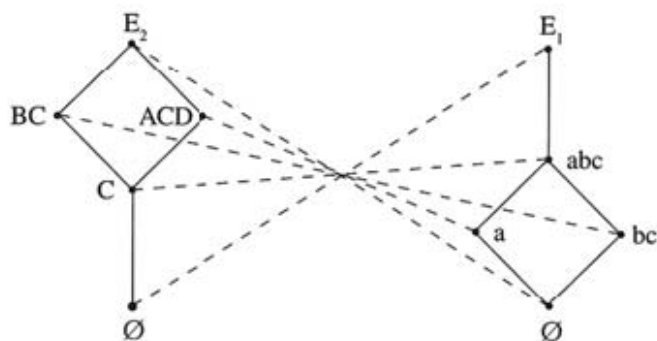
I, d'acord amb el gràfic anterior, es troben les relacions d'afinitat:¹⁵

$(\emptyset, E_2)$, (a, ACD) , (bc, BC) , (abc, C) , $(E_1, \emptyset)$

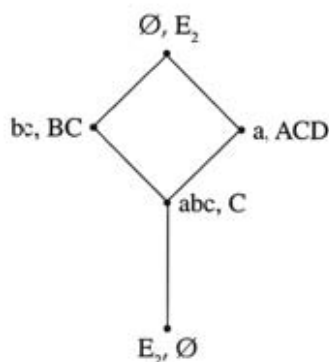
Les agrupacions obtingudes per a cada un dels conjunts E_1 i E_2 donen lloc a sengles reticles que, com s'ha assenyalat i ara es pot comprovar són isomorfs.

¹⁵ Observeu que per bé que abc és idèntic a E_1 , es tenen dues afinitats diferents perquè $C \neq \emptyset$.

En efecte:



Es pot comprovar fàcilment que si se superposen aquests dos reticles invertint-ne un, tots el vèrtexs coincideixen i es forma un reticle de Galois. En el nostre cas, el següent:



Apareixen, així, units elements de les dues agrupacions que conserven l'homogeneïtat als nivells desitjats. S'aconsegueix, a més, una estructuració perfecta dels grups obtinguts i, potser allò més important, una ordenació de més a menys elements del conjunt E_1 que estan lligats amb un ordre de menys a més elements del conjunt E_2 . El reticle de Galois presenta, d'aquesta manera, tota la gamma possible d'alternatives, tenint en compte els nivells mínims exigits, la qual cosa constitueix una informació necessària imprescindible per a la presa de decisions. És possible afirmar, en definitiva, que el concepte d'afinitat constitueix un element summament interessant en el nou paradigma de la teoria de la decisió.

Importància del concepte d'afinitat en economia i gestió d'empreses

L'agrupació homogènia d'objectes, materials o mentals, llurs estructuració i ordenació posteriors han ocupat sempre un lloc destacat en l'estudi de la fenomenologia econòmica. Tanmateix, és, potser com a conseqüència dels canvis produïts en els darrers anys en el tractament de les realitats cada cop més incertes, quan ha passat a ocupar un lloc de privilegi.

Efectivament, un cop superats els moments de desorientació provocats per les dificultats en la utilització dels dispositius clàssics basats en les matemàtiques de la certesa i les de l'atzar per explicar les relacions econòmiques en un món immers en un context d'incertesa, els científics han explorat camins nous cap al coneixement apartant-se cada cop més d'aquelles tècniques, sorgides de l'anàlisi numèrica, que tenien com a objectiu l'establiment d'ordres de preferència quantificats. Maximitzacions i minimitzacions ha estat, durant molts anys, el resultat d'assignacions numèriques, objectives o subjectives; i les adopcions de decisions davant de diferents alternatives tenia lloc, en general, a partir de l'adscripció a cada eventualitat d'una magnitud expressada en termes precisos, probabilístics i, més recentment, incerts.

Però la complexitat d'un univers econòmic globalitzat ha convertit aquests treballs, d'altra banda molt meritoris, en veritables peces de museu, quan la percepció de les realitats incertes no ha permès ni tan sols realitzar estimacions numèriques de caràcter subjectiu, és a dir, valoracions. És aleshores quan s'ha fet imprescindible la revisió de l'estructura bàsica sobre la qual s'assenta la teoria de la decisió comunament acceptada. Gradualment s'ha produït una substitució d'uns conceptes i d'unes tècniques i la revisió d'uns altres amb l'objectiu de fer-los més aptes per representar incerteses difícils d'acotar. En el naixement i la consolidació del nou paradigma de la teoria de la decisió¹⁶ el concepte d'ordre constitueix, potser, l'objectiu principal que cal assolir prèviament a la decisió. Però en moltes, moltíssimes ocasions, l'ordenació no és possible sense realitzar prèviament un procés d'agrupació per separar els elements homogenis o, si es prefereix, indiferents, d'aquells que no ho són. És aquí on juga un paper important la noció d'afinitat.

L'algoritme que permet l'obtenció d'afinitats ha estat utilitzat en diverses ocasions, fins i tot abans de la formulació dels elements teòrics que el sostenen. Efectivament, a partir del primer treball, ja citat, realitzat pel professor

¹⁶ Gil Aluja, J.: "Spre o noua paradigma a teoriziei". Discurs de recepció a l'Acadèmia Romanesa. 27 de setembre de 1995. *Revista Acadèmica*. Octubre del 1995, p. 20-21.

Kaufmann,¹⁷ que comprèn una aplicació en el camp de la gestió financera, els mateixos autors han emprat aquests mateixos elements per al tractament del problema de l'agrupació i estructuració en uns altres àmbits del coneixement, tals com la gestió de personal¹⁸ i la selecció d'inversions,¹⁹ entre d'altres.

Les grans possibilitats que enclouen les tècniques ja elaborades segons el concepte d'afinitat i les que previsiblement es desenvoluparan en el futur, auguren una utilització àmplia en un ventall de problemes que traspassaran amb escreix el llinar de la ciència econòmica.

Conclusions

Les complexes interaccions inherents als sistemes econòmics actuals i la incidència dels elements externs que provoquen efectes de previsió difícil, són algunes de les causes més significatives de la incertesa en la qual els agents emissors de decisions desenvolupen llur activitat, els quals no disposen, en la major part dels casos, d'informacions vàlides per a una quantificació de les magnituds relatives als períodes de temps sobre els quals s'estendran les conseqüències economicofinanceres de la decisió.

Quan això s'esdevé, es constata cada cop més la difícil utilització dels ressorts subministrats pels elements tradicionalment emprats quan sorgeix un problema d'elecció entre diversos esdeveniments o objectes, el suport dels quals es troba en una matemàtica numèrica que exigeix la mesura o una valoració dels fenòmens que intervenen en el marc de l'objecte material estudiat. Els intents de reconstruir els models i els algorismes coneguts i utilitzats en d'altres circumstàncies, adaptant-los al nou context, només han aconseguit resultats favorables parcialment. D'aquí sorgeix la necessitat, sentida per un grup ampli i inquiet d'investigadors, de cercar uns punts de suport nous sobre els quals sostenir uns esquemes nous capaços d'explicar, primer, i tractar, després, l'univers en aquesta fi de mil·lenni.

Des de fa uns quants anys, intentem elaborar un esquema formal que pugui constituir la base d'una teoria de la decisió nova, la qual, sent vàlida per al tractament de la incertesa, ho seria, també, com un cas particular, en l'atzar i el determinisme. Però pretendre abraçar una tasca tan àmplia exigeix

¹⁷ Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: "Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois lattices" Actas del Euro XI Congress O.R. Aachen, del 16 al 19 de juliol de 1991.

¹⁸ Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1992, p. 151-163.

¹⁹ Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid, 1993, p. 213-222.

incorporar elements teòrics nous que permetin cobrir espais del coneixement fins ara buits o inclosos de manera insuficient en els treballs elaborats pels especialistes en la matèria.

En aquesta situació, s'hi troba, segons la nostra opinió, el problema de l'agrupació, estructuració i ordenació d'objectes materials o mentals sobre els quals és susceptible de recaure una decisió. En els darrers decennis, s'han desenvolupat alguns conceptes a partir dels quals ha estat possible d'establir grups homogenis, sempre tenint en compte certes hipòtesis que restringeixen la validesa dels models proposats. Ens referim a les nocions de semblança i similitud, útils quan les relacions es formalitzen a través de matrius quadrades, simètriques i reflexives.

La generalització d'aquests conceptes pot arribar a partir de matrius rectangulars si s'aconsegueix un tractament adequat. És en aquest sentit que hem esbossat un cos teòric al voltant del concepte d'afinitat, a partir d'alguns elements, més o menys coherents entre ells, que en diferents ocasions havíem elaborat o recollit per donar ús a diversos treballs realitzats junt amb el professor Kaufmann. La mateixa definició d'afinitat, en el sentit que donem a aquest terme, era una assignatura pendent que hem intentat satisfer amb més o menys èxit. A partir d'aquí, la nostra tasca s'ha encaminat a fixar objectius, a assenyalar una metodologia i a justificar, potser amb més evidències que demostracions, la rigorositat i l'eficàcia de l'algoritme elaborat al seu moment per obtenir afinitats. Les famílies de Moore i els reticles de Galois han estat fonamentals, ja que a l'interès propi de cada un d'aquests elements combinatoris, s'hi ha afegit el resultant d'haver aconseguit un nexa d'unió entre ambdós. Gràcies a això, les afinitats constitueixen no només agrupacions homogènies a partir d'un determinat nivell, sinó també estructures formades per grups que mantenen un cert però estricte ordre.

El temps dirà si els esforços dedicats a aquests treballs mereixen la recompensa d'una utilització àmplia i eficaç, en nom del progrés d'una ciència, l'economia, dirigida a millorar el benestar de la nostra societat.

BIBLIOGRAFIA

- BARRE, Raymond: Pròleg a l'obra de Kaufmann, A. i Gil Aluja, J.: *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*. Ed. Hispano Europea. Barcelona, 1987.
- DUBREIL, P.: *Leçons d'algèbre moderne*. Ed. Dunod. París, 1964

- GIL ALUJA, J.: "La incertidumbre en la economía y gestión de empresas" Actas del IV Congreso de la Asociación Española sobre Tecnología y Lógica Fuzzy. Blanes, 14 de setembre de 1994.
- . "Spre o noua paradigma a teoriei decizei". Discurs de recepció a l'Acadèmia Romanesa, 27 de setembre de 1995. *Revista Acadèmica*. Octubre de 1995.
 - . "Les approches connexionnistes dans les changement du paradigme de la théorie de la décisions". 3ème Rencontre Internationale ACSEG. Nantes, 25 d'octubre de 1996.
 - . "Towards a new paradigm of investment selection in uncertainty" *Fuzzy Sets and Systems*. Vol. 84, núm. 2, 9 de desembre de 1996.
- KAUFMANN, A. i GIL ALUJA, J.: *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostel·la, 1986.
- . "Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois lattices" Actas del Euro XI Congress O.R. Aachen, del 16 al 19 de juliol de 1991.
 - . *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid, 1992.
 - . *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostel·la, 1993.
 - . *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostel·la, 1992.
 - . *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid, 1993.
- KHUN, Thomas: *La estructura de las revoluciones científicas*. Ed. Fondo de Cultura Económica. Madrid, 1982.
- PICHAU, E.: *Algorithm for Finding the Maximal Elements of a Finite Universal Algebra Inform Processing* 68. Publ. North Holland, 1969.
- POPPER, KARL: *La lógica de la investigación científica*. Ed. Tecnos. Madrid, 1971.