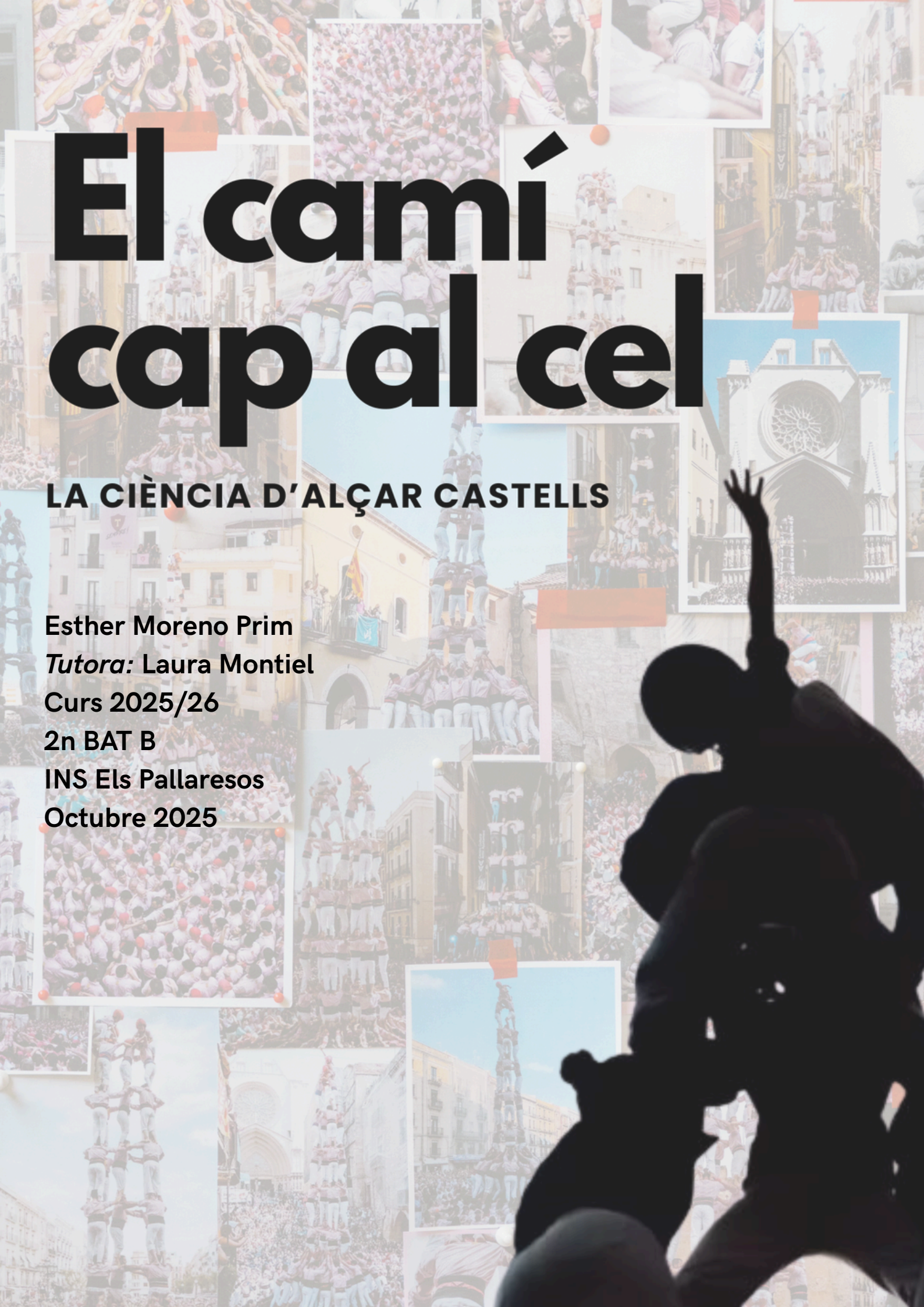




El camí cap al cel

LA CIÈNCIA D'ALÇAR CASTELLS

Esther Moreno Prim

Tutora: Laura Montiel

Curs 2025/26

2n BAT B

INS Els Pallaresos

Octubre 2025

“força, equilibri, valor i seny”

- Josep Anselm Clavé

RESUMEN

Los “castells” son una de las expresiones más representativas de la cultura catalana y una demostración impresionante de equilibrio, fuerza y coordinación humana. Más allá de su dimensión social y simbólica, esconden una gran complejidad técnica que a menudo pasa desapercibida. Este trabajo de investigación analiza los castells desde una perspectiva científica, con el fin de explicar cómo la física interviene de forma decisiva en su construcción y estabilidad. A partir de los principios básicos de la física, como las leyes de Newton, el centro de masa o la distribución de fuerzas, se explora cómo cada casteller contribuye a mantener el equilibrio global de la estructura. El trabajo ofrece así una nueva mirada sobre esta tradición, mostrando que detrás de cada castillo hay un conjunto de factores físicos que determinan su éxito o fracaso. Al mismo tiempo, invita al lector a reflexionar sobre la conexión entre la ciencia y la cultura popular, poniendo de manifiesto que disciplinas aparentemente alejadas pueden complementarse para ofrecer una comprensión más profunda de un mismo fenómeno. En definitiva, esta investigación presenta los castells no tan sólo como una expresión de fuerza colectiva, sino también como una auténtica obra de ingenio y precisión física.

ABSTRACT

Castells, or human towers, are one of the most emblematic expressions of Catalan culture and an extraordinary demonstration of balance, strength, and teamwork. Beyond their social and symbolic dimension, they hide a remarkable technical complexity that often goes unnoticed. This research project examines *castells* from a scientific perspective, aiming to explain how physics plays a decisive role in their construction and stability. Drawing on the basic principles of physics — such as Newton’s laws, the center of mass, and the distribution of forces — the study explores how each participant contributes to maintaining the overall equilibrium of the structure. In doing so, it offers a new perspective on this tradition, revealing that behind every *castell* lies a set of physical factors that determine its success or failure. At the same time, the research reflects on the connection between science and popular culture, showing how two seemingly distant fields can complement each other to provide a deeper understanding of the same phenomenon. Ultimately, *castells* are presented not only as a symbol of collective strength, but also as a genuine work of engineering and physical precision.

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ.....	1
1. JUSTIFICACIÓ.....	1
2. OBJECTIUS DEL TREBALL.....	2
3. HIPÒTESI.....	3
4. METODOLOGIA DEL TREBALL.....	3
 MARC TEÒRIC.....	 4
1. INTRODUCCIÓ ALS CASTELLS.....	4
1.1. HISTÒRIA I SOCIALITZACIÓ DELS CASTELLS.....	4
1.1.1. EVOLUCIÓ AL LLARG DEL TEMPS.....	4
1.1.2. PATRIMONI CULTURAL IMMATERIAL.....	6
1.2. LEMA CASTELLER.....	7
1.3. PLACES I DIADES CASTELLERES.....	7
1.4. INDUMENTÀRIA CASTELLERA.....	8
 2. CLASSIFICACIÓ DELS CASTELLS SEGONS LA SEVA ESTRUCTURA.....	 9
2.1. ESTRUCTURES SIMPLES.....	9
2.2. ESTRUCTURES COMPLEXES.....	10
 3. PARTS D'UN CASTELL.....	 10
3.1. LA PINYA.....	10
3.1.1. L'EQUIP DEL BAIX.....	11
3.1.2. L'EQUIP DE MANS.....	12
3.1.3. LA RESTA DE LA PINYA.....	13
3.2. FOLRE, MANILLES I PUNTALS.....	14
3.2.1. EL QUOCIENT DE CÀRREGA.....	15
3.2.2. REPARTIMENT DE FORCES.....	16
3.3. EL TRONC.....	17
3.4. EL POM DE DALT.....	18
3.4.1. REPARTIMENT DE FORCES DEL POM DE DALT.....	18

4. FORCES EN UN CASTELL.....	19
4.1. LLEIS DE NEWTON APLICADES ALS CASTELLS.....	19
4.1.1. PRIMERA LLEI DE NEWTON.....	19
4.1.2. SEGONA LLEI DE NEWTON.....	20
4.1.3. TERCERA LLEI DE NEWTON.....	20
4.2. CENTRE DE MASSA.....	21
4.3. TENSIÓ.....	22
4.4. MOMENTS DE FORÇA.....	22
5. CAUSES DE LES CAIGUDES.....	24
5.1. PICS DE CÀRREGA I OSCIL·LACIONS.....	24
5.2. PAS DE L'ENXANETA.....	24
5.3. GEOMETRIA DEL CASTELL.....	25
5.4. BIOMECÀNICA: LA LLEI DE LA PALANCA.....	26
PART PRÀCTICA.....	28
1. ENERGIA POTENCIAL DELS CASTELLERS EN UN CASTELL DE 9.....	28
2. ESTUDI DE LES FORCES D'UN 2d7 NET.....	31
2.1. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA.....	31
2.2. DESENVOLUPAMENT DEL PROBLEMA.....	33
2.2.1. REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE LES FORCES.....	33
2.2.2. EQUACIONS D'EQUILIBRI.....	34
2.3. RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA.....	35
2.4. RESULTATS DEL PROBLEMA.....	39
2.5. CONCLUSIONS.....	40
CONCLUSIONS DEL TREBALL.....	41
BIBLIOGRAFIA.....	43
ANNEXOS.....	45
1. TAULA AMB L'ENERGIA POTENCIAL DELS CASTELLERS D'UN 3d9f.....	45
2. GENERACIÓ DE LES EQUACIONS D'EQUILIBRIS DE MOMENTS.....	46

INTRODUCCIÓ

1. JUSTIFICACIÓ

Escollir el tema del meu treball de recerca no va ser una tasca senzilla. Volia que fos una temàtica que em motivés realment i que em permetés aprendre coses noves i interessants. Des del primer moment, vaig tenir clar que volia centrar-me en els castells, perquè són una part fonamental de la meva vida i de la nostra cultura. Els castells no només formen part de les nostres tradicions, sinó que també simbolitzen valors com el treball en equip, l'esforç, la perseverança i la superació personal. Tot i que sabia que volia parlar d'aquest tema, no tenia ben clar com enfocar-lo. El món dels castells és immens, i em costava trobar un punt concret per al meu treball. Vaig pensar en diverses opcions, com la història dels castells, les diferents colles castelleres o les tècniques de construcció, però cap d'aquestes idees em va convèncer del tot. Volia trobar un enfocament que fos més personal, en el qual hagués d'investigar i m'ajudés a entendre el món dels castells des d'un aspecte que realment m'interessés i m'apassionés.

Tot va canviar quan vaig començar a estudiar física a 1r de Batxillerat. Em va fascinar des del principi ja que poc a poc va fer que intentés comprendre molts dels fenòmens que succeeixen al nostre voltant. Vaig adonar-me que la física no és tan sols una matèria escolar, sinó una eina que ens ajuda a entendre els processos que expliquen el funcionament de molt del que ens envolta durant el nostre dia a dia. Va ser llavors quan em va sorgir una idea que va canviar el rumb del meu treball: per què no utilitzar els coneixements de la física per entendre millor els castells? Sempre que anava als assaigs o a les actuacions, em sorgien preguntes com, per exemple: **Com pot una estructura humana sostenir tants de quilos de pes? Per què alguns castells són més estables que d'altres? Quines forces actuen sobre els castellers? Com es distribueixen les càrregues?** Aquestes preguntes em van portar a pensar que la física podia ser la clau per a encaminar el meu treball de recerca basat en els castells.

Amb aquesta nova perspectiva, vaig decidir que el meu treball de recerca se centraria en explorar la relació entre els castells i els principis de la física. Volia investigar com algunes de les lleis físiques poden explicar fenòmens tan particulars com el funcionament dels castells, des de com es reparteixen les forces entre els castellers fins a les condicions que permeten que una estructura tan complexa es mantingui en equilibri o que, en altres casos, caigui. Em va semblar una manera perfecta de combinar dues de les meves grans passions: els castells i la ciència. Aquest enfocament no només em permetria aprofundir més en el

món dels castells, sinó també veure detalladament com la física pot ser aplicada a situacions concretes tan tradicionals com aquesta.

Finalment, vull destacar que aquest treball també té un valor personal molt important per a mi. Els castells han estat una part de la meva vida des de petita. Recordo les tardes a la plaça, veient els castells amb la meva família i sentint l'emoció de veure com una estructura es carrega o descarrega amb èxit. Fins ara, mai m'havia plantejat com funcionen des d'un punt de vista científic, i aquest treball m'ha permès apropar-me als castells des d'un angle diferent. Espero que, gràcies a aquesta investigació, pugui entendre millor els detalls tècnics d'aquest món fascinant i que el meu treball pugui ser útil per a altres persones que vulguin conèixer més sobre aquest element tan emblemàtic de la nostra cultura.

2. OBJECTIUS DEL TREBALL

L'objectiu principal d'aquest treball és analitzar la relació entre els principis de la física i la construcció dels castells, entenent com les lleis físiques condicionen la seva estabilitat i permeten assolir estructures de gran complexitat. A partir d'aquest propòsit general, es defineixen els diferents objectius específics:

- **Objectiu 1.** Comprendre i descriure els principis físics que intervenen en la pràctica castellera, centrant l'atenció en aspectes com la distribució del pes, l'equilibri de forces, el centre de massa i la tensió estructural. El treball pretén aportar una visió científica que complementi el coneixement tradicional i empíric propi de les colles castelleres.
- **Objectiu 2.** Analitzar de manera quantitativa com es reparteixen les forces en les diferents parts del castell, especialment centrant-me en el 2d7 net. Mitjançant la formulació d'un model físic, es busca determinar quines són les magnituds que permeten mantenir l'equilibri i la seguretat de l'estructura.
- **Objectiu 3.** Posar de manifest que la física no és una disciplina allunyada de la realitat quotidiana, sinó que pot ser una eina clau per comprendre, millorar i valorar una tradició cultural com la castellera. D'aquesta manera, el treball pretén establir un pont entre la ciència i la cultura popular catalana.

3. HIPÒTESI

Pot ser que darrere de l'aparença artística dels castells hi hagi una coherència física que els fa possibles. Pot ser que la seva estabilitat depengui de com es reparteixen les forces entre els castellers, amb els pisos inferiors suportant més pes i les forces horitzontals, tot i ser menors, ajudant a mantenir l'equilibri lateral. Pot ser que petits ajustos en la postura o la coordinació canviïn significativament la manera com es reparteixen aquestes forces. En estudiar-ho des de la física, pot ser que es pugui comprendre millor la delicada combinació de força, equilibri i complicitat que fa que un castell es mantingui dret.

4. METODOLOGIA DEL TREBALL

La metodologia del treball combina recerca teòrica i anàlisi pràctica per estudiar la relació entre la física i els castells.

Primer, es farà una recerca bibliogràfica sobre la història, l'estructura i la terminologia castellera, així com sobre els principis físics implicats (lleis de Newton, centre de massa, moments de força, etc.). Aquesta fase servirà per establir el marc teòric del treball.

Després, es realitzarà una observació directa d'assaigs i actuacions per analitzar la distribució de forces, les postures i els moments crítics dels castells. Les dades es recolliran en un diari de camp amb esquemes i fotografies.

Amb aquesta informació, s'elaborarà un model físic simplificat d'un castell concret (un 2d7 net) per calcular la distribució de càrregues i les forces que actuen sobre cada casteller, mitjançant equacions d'equilibri i eines de càlcul bàsic.

Els resultats teòrics es compararan amb els observats per comprovar la validesa de la hipòtesi inicial: que la distribució de forces és clau per a l'estabilitat del castell. També es tindran en compte factors humans com la coordinació o l'experiència.

Finalment, tota la informació es recollirà en un document estructurat amb introducció, marc teòric i anàlisi pràctica, seguint criteris de claredat i rigor. Aquesta metodologia busca unir la tradició castellera amb una visió científica, mostrant els castells com una combinació d'enginy, equilibri i col·laboració humana.

MARC TEÒRIC

1. INTRODUCCIÓ ALS CASTELLS

1.1. HISTÒRIA I SOCIALITZACIÓ DELS CASTELLS

Els castells han evolucionant destacablement i han viscut situacions extremes: de quasi desaparèixer a principis del segle XX, a viure el seu millor moment actualment.

L'inici dels castells té lloc al segle XVIII, quan va començar a prendre forma durant les celebracions locals, especialment a la zona de Valls. Al principi, els castells eren una activitat senzilla, però ràpidament van evolucionar en complexitat i tècnica a mesura que les colles castelleres es van organitzar i van començar a competir entre si. Durant els anys, els castells s'han convertit en un important símbol d'identitat cultural, representant diferents valors que defineixen la societat catalana. Actualment, són reconeguts internacionalment, amb la seva declaració com a patrimoni cultural immaterial de la humanitat per la UNESCO el 2010. Això també ha ajudat a fer que la seva popularitat creixi i a què aquesta tradició, que atrau l'interès de la gent local i de molts visitants d'arreu del món.

1.1.1. EVOLUCIÓ AL LLARG DEL TEMPS

Els orígens (1770-1800): Els castells són una evolució del ball de valencians¹, que es feien durant les processons religioses i finalitzaven amb l'aixecament d'una construcció humana. Quan aquest ball, originari del País Valencià, va arribar a Catalunya al segle XVIII va arrelar amb força al Camp de Tarragona, el Penedès i el Garraf. La figura final amb la qual acabava el ball va anar guanyant protagonisme: l'objectiu era fer-la cada vegada més alta o complicada, no només per superar-se a un mateix, sinó també per superar els altres grups de ball de valencians. Va ser a Valls on aquesta competència va acabar donant autonomia pròpia a aquesta figura final fins a independitzar-la del ball i convertir-la en el que avui coneixem com a castells.



Figura 1: Imatge del Ball de Valencians.

Font: premsacossetania.blogspot.com

Primeres colles (1801-1850): Fer la construcció més alta era l'objectiu dels primers castellers vallencs que, a començaments del segle XIX, es van organitzar ja en dues colles: la dels Pagesos i la dels Menestrals. Les colles vallenques es desplaçaven per tot el Camp de Tarragona i el Penedès, de juny a octubre, participant en les festes majors.

¹ Ball de valencians: Ball fet per uns homes de la Comunitat Valenciana, cosa que és sinònim de muixeranga d'algun poble valencià, que pot tenir diferents parts com un ball, una torre...



Figura 2: Imatge de dos 3d9f simultanis de les colles vallenques.
Font: es.wikipedia.org

Primera època d'or dels castells (1851-1893): Durant el primer segle d'existència, el fet casteller va evolucionar en positiu, les colles van anar assolint noves fites que els van portar a aixecar castells de fins a nou pisos. De fet, és el 1851 quan es documenta el primer castell de 9 amb folre de la història, durant les festes de Santa Tecla a Tarragona. L'activitat gaudia d'una gran popularitat a la seva àrea tradicional. Aquest període es tanca al Vendrell l'any 1893 amb el darrer castell de 9 pisos que es veurà en gairebé un segle.

La decadència (1894-1926): El 1894 està documentat l'últim castell de 9 i, lentament, es van anar perdent tots els registres limitant el nivell dels castells als sis pisos. Diversos factors van provocar aquesta crisi: la migració del camp a la ciutat, la popularització de nous esports com el futbol, l'expansió de la sardana i la pèrdua de popularitat dels castells. Durant aquest període, només actuaven esporàdicament les colles vallenques, i hi hagué diversos anys sense cap activitat castellera, com entre 1913-1917, 1919-1921 i 1924-1925. Aquesta forta davallada es va allargar fins al 1926, quan van aparèixer dues noves colles: els Xiquets de Tarragona i els Nens del Vendrell.

La renaixença (1926-1981): A partir del 1926 els castells viuen una revifalla a partir de la fundació de les primeres colles estables no vallenques. Fet que modifica el mapa i motiva una nova competència que implicarà un fort creixement del món casteller, amb la recuperació dels castells de vuit pisos, en un moment en què les colles comencen a utilitzar un color de camisa per a diferenciar-se entre elles.

Segona època d'or (des de 1981): Dins d'aquest context, el següent impuls arriba gràcies a la recuperació dels castells de nou. El 1981 la Colla Vella dels Xiquets de Valls descarrega, quasi un segle després, el 4d9f que serveix per obrir les portes del que s'ha anomenat la segona època d'or dels castells. Cinc anys després la Colla Joves Xiquets de Valls completa també el 3d9f i els castells de nou es comencen a sovintejar per part d'altres colles punteres del país.



Figura 3: Imatge del primer castell de 9 descarregat el segle XX. Font: wikipedia.org

El boom dels 90: Amb la presència dels castells l'any 1992 a la cerimònia d'inauguració dels Jocs Olímpics de Barcelona, el món casteller viu una fase de mediatització i internacionalització arribant a doblar el nombre de colles existents feia deu anys enrere. Les noves fites no tarden a arribar i el 1993, els Minyons de Terrassa assoleixen el primer castell de gamma extra i el 1998 es fan els primers castells de 10.



Figura 4: Imatge de la inauguració dels J.J.O.O de Barcelona l'any 1992. Font: castellersdebarcelona.cat

Els castells avui: A partir de l'any 2010, amb la inclusió dels castells a la llista representativa del Patrimoni Immaterial de la Humanitat per part de la UNESCO i a conseqüència també de la crisi econòmica que permet l'entrada de nous castellers, es torna a viure un altre boom amb la creació d'una nova fornada de colles fins a arribar al centenar el 2019. Aquest any també representa un salt endavant en l'àmbit tècnic, ja que durant la Diada de Santa Úrsula les dues colles de Valls carreguen per primera vegada en la història el 3d9sf.

1.1.2. PATRIMONI CULTURAL IMMATERIAL

La inclusió dels castells a la llista del Patrimoni Immaterial de la Humanitat va ser aprovada per la UNESCO² el 16 de novembre de 2010 així doncs, adquirint una categoria universal. La candidatura va ser impulsada per la Comissió Castells Patrimoni de la Humanitat, formada pel Centre de Promoció de la Cultura Popular i Tradicional Catalana de la Generalitat de Catalunya, la CCCC³, la revista "Castells" i el Centre Unesco de Catalunya.

El projecte es va iniciar a Valls l'abril de 2007 durant la primera Nit de castells, i el 008 el Parlament de Catalunya hi va donar suport unànimement. Com que la UNESCO és una organització d'estats, l'Estat espanyol va presentar oficialment la candidatura al juliol de 2008, després de rebre l'aprovació del Consejo del Patrimonio Histórico. Finalment, el 28 d'agost del mateix any, a la seu de la UNESCO, a París, es va lliurar el Dossier complet de Candidatura dels Castells elaborat per la Comissió.



Figura 5: Logo campanya "Castells Patrimoni de la Humanitat". Font: castellersderubi.wordpress.com

² UNESCO: Organització de les Nacions Unides per a l'Educació, la Ciència i la Cultura.

³ CCCC: Coordinadora de les Colles Castelleres de Catalunya

1.2. LEMA CASTELLER

Els lema que tenen els castellers, sorgit d'un vers de l'obra Els Xiquets de Valls d'en Josep Anselm Clavé, és: "Força, Equilibri, Valor i Seny". Aquest resumeix les característiques d'un casteller:

Força: En els temps originaris dels castells, els castellers eren persones corpulentes i fortes, acostumades a fer grans esforços en el seu dia a dia. Actualment es valora molt més la tècnica que la força.

Equilibri: El sentit de l'equilibri és clau pel simple fet d'estar una persona sobre l'altra i, en la majoria de castells, amb altres persones en el mateix pis.

Valor: Una característica que han de tenir tots els castellers.

Seny: Tant a l'hora de planificar un castell, com a l'hora d'assajar-lo i tirar-lo a plaça, es necessita que tothom tingui seny ja que de l'esforç i concentració de tots depèn l'èxit del castell.

Tot i que el lema casteller es fonamenta tradicionalment en aquests quatre mots, n'hi ha molts d'altres igual, tant o més importants, necessaris per a la bona execució de la pràctica castellera: constància, treball, esforç, regularitat, confiança, compenetració, germanor, etc.

1.3. PLACES I DIADES CASTELLERES

S'anomena diada castellera a una actuació d'una o més colles castelleres davant la presència de públic espectador. Una diada castellera sol convocar-se a la plaça o carrer més important o emblemàtic del poble o ciutat on s'organitza l'actuació, habitualment on hi té la seu l'ajuntament. Aquesta plaça o carrer rep el sobrenom de plaça castellera.

Reben el nom de "places castelleres" aquelles places i carrers amb molta tradició de celebració d'actuacions castelleres, normalment amb diades anuals. Solen ser qualificades segons la màxima construcció que hi ha esdevingut. Així doncs, tenim places de 10 (que han vist castells de deu pisos), places de 9, places de 8, places de 7 i places de 6.

Aquestes són algunes de les millors places castelleres del món on s'hi han vist les millors construccions de torres humanes:

Plaça del Blat (Valls)

Plaça de la Vila (Vilafranca del Penedès)

Plaça de la Font (Tarragona)

Plaça de les Cols (Tarragona)

Plaça del Mercadal (Reus)

Raval de Montserrat (Terrassa)

Plaça del Pou (Altafulla)

Plaça de la Vila (Vendrell)

1.4. INDUMENTÀRIA CASTELLERA

La indumentària castellera consta de tres elements principals: pantalons blancs, faixa i camisa. A més, sovint s'hi afegeix un mocador vermell amb punts blancs, que també s'ha convertit en un element característic. Aquesta vestimenta és comuna a totes les colles castelleres.

Els **pantalons blancs**, habitualment de texà, fil o cotó, son còmodes i resistents, adequats per a l'esforç físic que requereix l'activitat castellera. L'origen del seu color blanc pot tenir relació amb la roba de la feina que portaven els homes del camp, que sovint, per comoditat, es quedaven en calça curta blanca a l'hora d'assajar castells.

La **faixa** és un dels elements més importants. Tot i que originàriament era una peça tradicional del món rural, utilitzada per protegir la zona lumbar durant les feines pesades, en l'àmbit casteller s'ha convertit en un element indispensable. La faixa dona suport a l'esquena, ajuda a prevenir lesions i, alhora, ofereix punts de suport perquè altres castellers s'hi puguin agafar.

La **camisa** és el tret distintiu de cada colla. El color i l'escut que duu brodat són els elements que permeten identificar a quina colla pertany un casteller. A més de ser un símbol d'identitat, la camisa té una funció pràctica; protegeix la pell de rascades, absorbeix la suor i facilita l'adherència entre castellers.



Figura 6: Imatge durant la construcció del tronc d'un 5d8 on s'hi pot veure la indumentària castellera i el seu ús. Font: facebook.com/lins.grinogarreta

2. CLASSIFICACIÓ DELS CASTELLS SEGONS LA SEVA ESTRUCTURA

El nom dels castells és determinat per dos paràmetres: el nombre de castellers per pis (sense tenir en compte el pom de dalt) i el nombre de pisos. El mínim de pisos que ha de tenir una estructura per ser considerada un castell són sis, amb l'única excepció dels pilars, que se'n fan a partir de quatre pisos.

2.1. ESTRUCTURES SIMPLES

Són les més fàcils de comptar i identificar. Es componen d'un, dos, tres o quatre castellers per pis. Compte, però, que quan ens referim a estructures simples no volem dir pas que siguin senzilles de fer.

Pilar: un sol casteller per pis. El mínim de pisos que ha de tenir un pilar perquè es consideri un castell són 4. El pilar de el pilar de nou amb folre, manilles i puntals és el pilar més difícil descarregat en la història dels castells.

Torre/Dos: dos castellers per pis. La torre de dos sense folre és la torre més difícil descarregada en la història dels castells.

Tres: tres castellers per pis. El tres de nou sense folre és el tres més difícil assolit en la història dels castells.

Quatre: quatre castellers per pis. El quatre de nou sense folre és el quatre més difícil descarregat en la història dels castells, està en competència de dificultat amb el 4 de 10 amb folre i manilles.

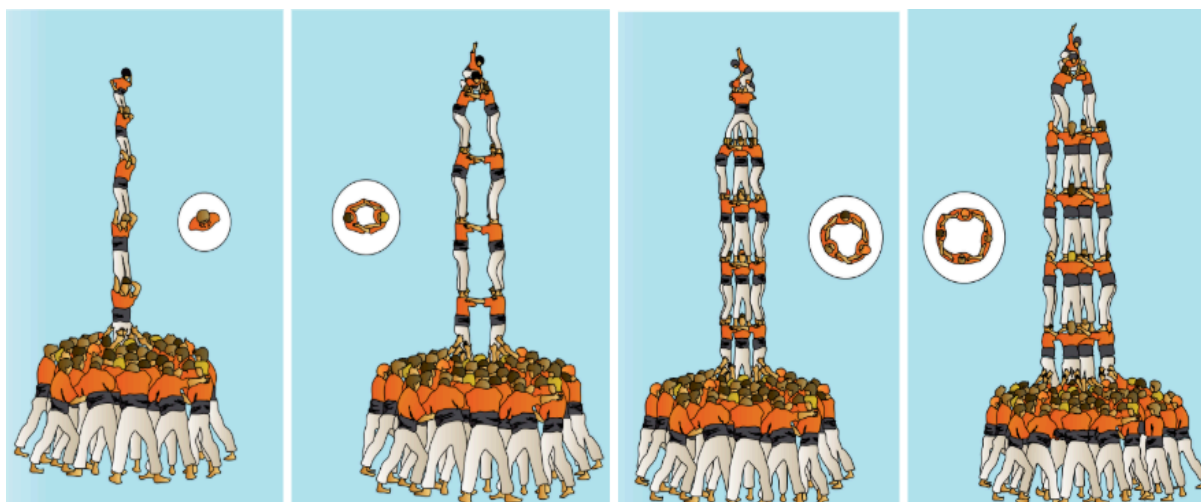


Figura 7: representació de les diferents estructures castelleres simples.

Font: cpnl.cat

2.2. ESTRUCTURES COMPLEXES

Amb més de quatre castellers per pis, les estructures complexes no són cap altra cosa que una combinació d'estructures simples. Algunes d'elles són veritables obres d'enginyeria.

Cinc: cinc castellers per pis. Format per un tres i una torre que s'agafa a la rengla del tres. Hi ha dos poms de dalt però únicament una enxaneta. El 5d9f és el màxim representant d'aquest grup de castells.

Set: set castellers per pis. Format per un quatre i un tres que s'uneix a una de les rengles del quatre. Hi ha dos poms de dalt però una única enxaneta. El 7d9f és el castell més difícil assolit d'aquest grup.

Nou: nou castellers per pis. Format per un tres central amb una torre adossada a cada rengla del tres. Hi ha tres poms de dalt i pot haver-hi una sola enxaneta o bé tres enxanetes. El 9d9f és el castell més difícil descarregat d'aquest grup de castells.

Castells amb agulla: castells que tenen un pilar incorporat al mig de l'estructura. Només existeixen el tres i el quatre amb agulla. El 3d9fa és el castell amb agulla més difícil aconseguir al llarg de la història dels castells.

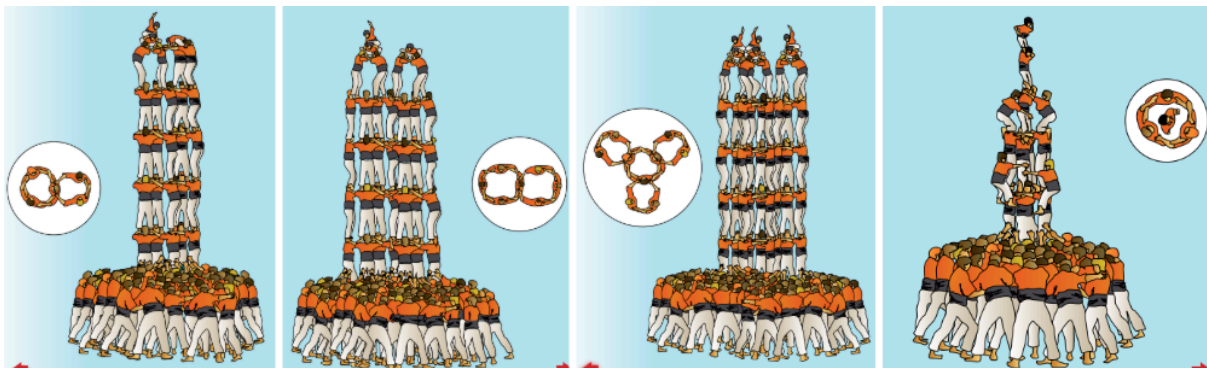


Figura 8: representació de les diferents estructures castelleres complexes.

Font: www.cpnl.cat

3. PARTS D'UN CASTELL

3.1. LA PINYA

És el nom que rep la base del castell. Està concebuda com una sèrie de línies de força fetes per persones que han d'intentar anul·lar els efectes del pes que baixa del castell

per evitar que s'obri i es deformi. Aquestes línies de força apuntalen els diferents pilars de què consta el castell. Quan el castell té folre o manilles, aquesta base rep el nom de soca. Està formada per tres parts: l'equip de baix, l'equip de mans i la resta de la pinya.

Funcions de la pinya:

- És una estructura de suport als baixos, gràcies a la pressió, l'estabilitat i la seguretat que els transmet la gent que forma la pinya.
- Redueix un 45% del pes que reben els baixos.
- Dóna suport als segons, ja que impedeix que s'asseguin i els subjecta.
- Fa de matalàs de seguretat en cas de caiguda, ja que impedeix que els castellers caiguin directament a terra i fa que la caiguda sigui més lleu.
- Les rengles són molt importants, es poden considerar com a línies de força, ja que gràcies a aquestes es produeix el repartiment de forces.



Figura 9: fotografia aèria de la pinya d'un 4d9f. Font: fotògraf D. Ramos.

3.1.1. L'EQUIP DEL BAIX

L'equip del baix ocupa la zona més interna de la pinya, al nucli central. Està format per castellers que s'encarreguen de proporcionar suport al baix, assegurant-se que mantingui la seva postura i que no col·lapsi pel pes que ha de suportar sobre les espatlles. Cada baix compta amb un equip propi, compost per un contrafort i dues crosses.

El contrafort: El contrafort o home del darrere es col·loca just darrere del baix, segon (al folre) o terç (a les manilles) posicionant el pit



Figura 10: Representació de la força que exerceix el contrafort. Font: Anna Terón.

darrera de la seva esquena per a fer pressió i evitar que el baix es mogui endavant o endarrere. Evita que el castell s'obri de la mida amb què s'ha quadrat a mesura que es van incorporant la resta de castellers del nucli. També col·loca les cames de forma estratègica per a que el baix no s'assegui i ho fa col·locant una cama davant de l'altre i amb els seus braços, s'agafa amb un altre contrafort o amb les crosses del seu baix.

La crossa: La crossa ha de ser una persona més petita que el baix però forta, ja que ha de col·locar l'espatlla sota l'aixella del baix per evitar que es mogui de costat, ajudar a suportar el pes del castell i impedir que s'enfonsi. Ha de mantenir l'esquena recta, tenir el pit apropat a les costelles del baix per protegir-lo, i el genoll intern de la cama central del castell ha de bloquejar el genoll del baix. Un braç ha de passar per sota de l'aixella del contrafort, agafant-li l'esquena i subjectant la seva faixa, mentre que l'altre braç envolta l'esquena de l'agulla, agafant també la seva faixa.



Figura 11: Representació de la força que exerceix la crossa. Font: Anna Terón.

3.1.2. L'EQUIP DE MANS

L'equip de mans està format pels castellers que donen suport als segons. Són els castellers més alts de la colla, que treballen, fonamentalment, amb els braços i amb les mans. Igual que cada baix té el seu equip, cada segon també té el seu equip de mans format per les agulles, les primeres mans, els laterals i els vents o daus.

L'agulla: El casteller que fa d'agulla és alt i prim i ocupa el nucli del castell, és a dir, està cara a cara amb el baix. Ha de col·locar les mans als genolls del segon fent força cap amunt, creuant els avantbraços i agafant-li els pantalons, amb això fa que el segon ajunti els genolls i evita que s'agenolli. L'esquena de l'agulla ha d'estar recta i recolzada a la resta d'agulles per tal de mantenir les formes de l'interior del castell i també a tocant amb el pit del baix mantenint-lo al seu lloc i impedit-li que es tiri endavant.



Figura 12: Representació de la força que exerceix l'agulla. Font: Anna Terón.

El primeres mans: Els primeres mans són els castellers alts i forts que se situen darrere del contrafort i impedeixen que aquest vagi enrere. Es col·loca posant les mans al cul del segon i apuntant amb els dits grossos cap al mig. Les cames les ha de col·locar una més endavant de l'altre per poder controlar la força de pit. S'encarrega d'impedir que el segon s'assegui i de donar-li més o menys pit quan aquest ho necessiti.



Figura 13: Representació de la força que exerceix el primeres mans.
Font: Anna Terón.

La seva força sempre ha de ser cap a dalt diagonalment i, a la vegada, han de fer força amb el pit per donar pressió al nucli.

A partir de les primeres mans s'hi uneixen les segones mans, les terceres mans i seguidament els cordons. Aquesta filera de castellers formen el que seria la rengla de mans.

Les segones mans se situen darrere les primeres mans agafant-li els canells. La seva funció principal és ajudar al primeres a subjectar al segon, però alhora és qui vigila que la rengla estigui recta i que no doni pit excessiu.

Els laterals: Els laterals són també castellers alts i forts, situats a banda i banda de cada baix i que s'ocupen de controlar que el segon no es mogui cap els costats. Es col·loquen darrere de les crosses amb els braços cap a dalt i les mans s'han de col·locar en forma de V, agafant la cuixa del segon, i una cama més endavant que l'altre per tal de poder falcar-les i que no s'enfonsin.

Darrere del lateral s'hi afegeix el segon lateral, tercer lateral... que agafen els canells o els colzes del primer lateral i li donen pit.

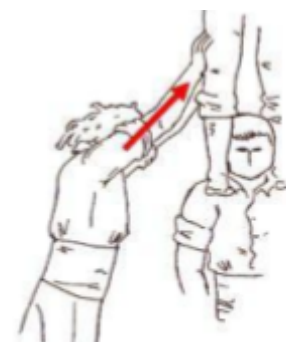


Figura 14: Representació de la força que exerceix el lateral. Font: Anna Terón.

El dau: Els daus se situen entre mig dels primers laterals. La seva funció consisteix en evitar que el castell es giri i que les rengles s'ajuntin. Quan entren a la seva posició, han de valorar si estan prou a prop del castell i, a més, s'encarreguen de controlar que els laterals estiguin ben col·locats. Es col·loquen amb els braços ben oberts i agafant la cama dels segons. La força que fan aquests castellers no és gaire diferent de la dels laterals.

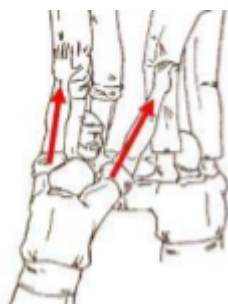


Figura 15: Representació de la força que exerceix el dau. Font: Anna Terón.

Darrere del dau hi hauria el segon dau i tercer dau formant una rengla de mans.

3.1.3. LA RESTA DE LA PINYA

La resta de la gent que també forma la pinya està posicionada seguint un estricte ordre de col·locació intentant formar una mena de matalàs humà que es va fent gran a mesura que els castellers s'hi van col·locant. D'aquesta forma, darrere del primeres mans i dels daus, es van situant en línia recta tots els altres castellers que donen suport amb el pit i els braços al que tenen davant i que formaran la resta de la pinya.

A cada filera de castellers que es formen en línia recta darrere de cada pilar del castell se li anomena rengla. El primer component de la rengla és el primeres mans, el següent el segones mans, després el terceres mans i així fins a crear una gran rengla. Cada cercle concèntric que es forma és un cordó i, per tant, els primers membres de les rengles formen part del primer cordó.

El Tap: Els taps són les persones més petites de la colla, fan poc volum i es situen als espais que queden lliures entre les rengles de la pinya per a que aquesta no pateixi deformacions. S'han de col·locar amb el cap agbaixat i els braços enganxats al cos.

El cordó de seguretat: L'últim cordó és el que tanca la pinya i el més important a nivell de seguretat. Es col·loquen fent pressió amb els braços estirats i mirant el castell.

3.2. FOLRE, MANILLES I PUNTALS

El folre podem entendre'l com a una segona pinya que es situa a sobre de la primera per reforçar els segons i ajudar als tercers. Podem trobar-lo a tots els tipus d'estructures. Tot i això, el folre només s'afegeix als castells de 9, excepte al 2d8 i al pd7 que també el requereixen.

La estructura del folre és molt semblant a la de la pinya, cada segon té el seu equip de mans i equip de segon, a diferència de la pinya que té l'equip de baix. Una altra diferència és que al folre no hi ha taps, cosa que fa que sigui menys compacte. També hi ha un nou component: l'escaleta. Es col·loca al final de cada rengla de mans i ajuda a la gent del tronc a pujar.

Hi ha vegades, que en els castells de gran dificultat, com el 3d10, 4d10, el 2d9 o el pd8, s'ha d'afegir una tercera pinya anomenada manilles a sobre del folre. Igual que el folre, molt semblant a la pinya però amb un volum de gent molt menor.

L'1 de novembre de 2022 els castellers de Vilafranca van posar una quarta pinya sobre les manilles. Aquesta quarta pinya és anomenada puntals i es va poder veure al pilar de 9 amb folre manilles i puntals que va quedar carregat.

Tant el folre, com les manilles i els puntals tenen la mateixa funció: alliberar pes i lluitar en contra del moviment, és a dir, mantenir les direccions de càrregues.

En cas de caiguda, aquestes estructures absorbeixen menys energia d'impacte, bàsicament perquè l'energia no es pot trametre tant als teus companys de pis, ja que els seus membres

estan menys compactats (hi ha menor contacte o fins i tot buits); en canvi a la pinya sí que ho pot fer, pel sol fet de ser molt més compacte. En aquest cas l'energia es trameta com una espècie d'ona de deformació que es trameta cap als altres membres. Tot i així, el folre i les manilles, en formar diferents nivells o "sostres", fan que la caiguda sigui més esglaonada i alteren la trajectòria del casteller, de manera que aquest acaba caient a la pinya després de passar pel folre o les manilles, normalment. Això fa que l'energia no s'alliberi tota en un sol impacte.



Figura 16: Senyalització de la pinya, el folre i les manilles d'un castell. Font pròpia.

3.2.1. EL QUOCIENT DE CÀRREGA

El Quocient de Càrrega és una teoria formulada per Joan Bofarull i Solé que ens permet saber de manera matemàtica si un castell necessita folre, manilles o puntals per reforçar-lo. Per calcular-lo, primer hem de comptar el nombre de persones que hi ha al tronc del castell, des dels segons fins a l'enxaneta, i dividir aquest nombre pel nombre de baixos que el formen.

$$QC = \frac{\text{persones al tronc}}{\text{nombre de baixos}}$$

Si el resultat és 6 o major de 6, significa que el castell necessita folre; si d'altra banda, el resultat és 7 o major que 7, significa que necessita manilles i si és superior a 8, el castell necessita puntals.

Per exemple:

- El tronc del 3d8 està format per 16 persones (3x4 -tronc- + 2 -dossos- + 1 -acotxador- + 1 -enxaneta-) i té 3 baixos. Això dona un $QC = \frac{16}{3} = 5'33$, la qual cosa indica que aquest castell no necessita cap estructura addicional sobre la pinya.
- D'altra banda, el tronc del 3d9f compta amb 19 persones (3x5 + 2 + 1 + 1) i també té 3 baixos. En aquest cas, el $QC = \frac{19}{3} = 6'33$. Aquest valor, en ser superior a 6, ens indica que el castell requereix un folre per garantir l'estabilitat.
- Finalment, el tronc del 3d10fm està format per 22 persones (3x6 + 2 + 1 + 1) i 3 baixos. Això dona un $QC = \frac{22}{3} = 7'33$, un valor que supera els límits per a un castell només amb folre, de manera que aquest necessita tant folre com manilles.

Algunes colles, gràcies a la seva preparació, han aconseguit realitzar castells que, tot i que normalment requeririen l'ús del folre, s'han pogut fer sense ell.

3.2.2. REPARTIMENT DE FORCES

En el folre i les manilles, el repartiment de forces segueix una dinàmica similar a la de la pinya, però amb més dificultat ja que els castellers han de mantenir-se en equilibri a sobre de la pinya i, a sobre, els seus membres estan més allunyats entre ells, fet que redueix la pressió directa que suporten i incrementant la dificultat d'estabilitzar-se.

El mecanisme d'aquestes estructures es basa en la distribució equilibrada de les forces. Cada casteller genera una força inclinada, que es divideix en una part horitzontal i una altra vertical. Les forces horitzontals es compensen mútuament gràcies a la disposició uniforme

dels castellers al voltant del castell. Mentrestant, les forces verticals es combinen per resistir el pes del tronc. D'aquesta manera, el resultat final és una força predominantment vertical que ajuda a mantenir l'estructura estable i equilibrada. Les forces horitzontals es compensen entre si per la simetria si tenim en compte el nucli del pis al qual tapen. Dit d'una altra manera, són forces que van cap endins i serveixen per a evitar que el nucli del castell s'obri (forces cap enfora).

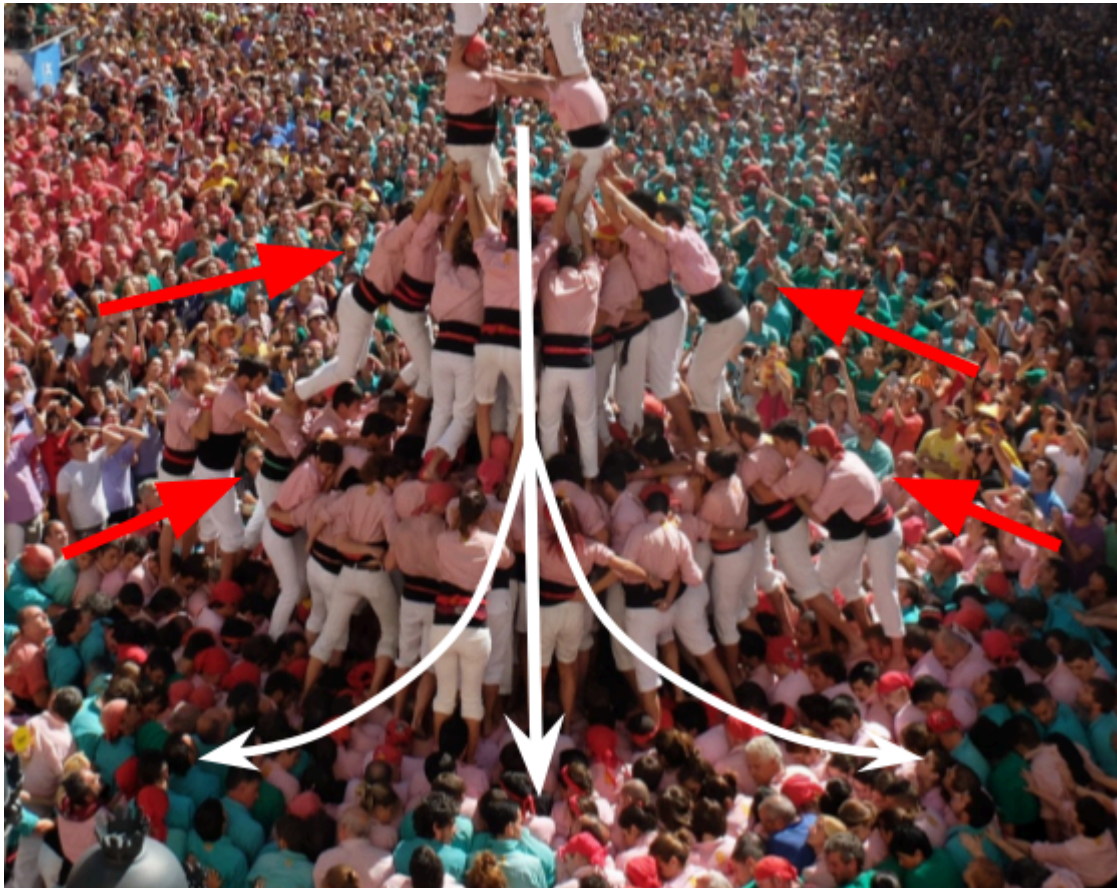


Figura 17: Representació del pes que suporten en blanc, i la força que exerceixen en vermell. Font pròpia.

3.3. EL TRONC

El tronc són els pisos de castellers que configuren l'esquelet de l'estructura. Desde el baix fins el pis anterior als dossos; baix, segons, terços, quarts, quints, sisens (en castells de 9) i setens (en castells de 10) és la nomenclatura que rebrà cadascun dels pisos del castell. La tipologia de castellers varia en funció del pis; com més amunt més àgils i lleugers. Cada columna de castellers que pugen s'anomena rengla o pilar.

El nom de cada castell és determina a partir del tronc d'aquest. Es pot escriure de tal manera: **X de Y amb Z** ; on X és el nombre de castellers que formen cada pis, Y és el

nombre de pisos i Z els complements del castell, com podrien ser el folre, les manilles o l'agulla.

3.4. EL POM DE DALT

Són sempre els tres últims pisos d'un castell, menys en els pilars. El formen els més petits de l'estructura: dosos, acotxador i enxaneta, és a dir, la canalla. A l'hora de determinar l'alçada del castell, cadascun d'ells compta com un pis.

Aquesta part del castell sempre té la mateixa estructura, tot i que els castells compostos, solen estar formats per més d'un pom.

Els dosos són dos castellers que es col·loquen damunt de l'últim pis del tronc, amb els braços agafats i ajuntant el màxim possible els seus caps perquè l'acotxador pugui pujar sobre seu. L'acotxador col·loca un peu damunt de cadascun dels dosos i amb els braços s'agafa als braços d'aquests. Acostumen a ser els més petits del castell, per facilitar a l'enxaneta el seu pas per sobre seu. L'enxaneta és l'encarregada de coronar el castell passant per sobre de l'acotxador i fent l'aleta (enlairant el braç cap al cel). L'enxaneta corona el castell pujant per un costat i baixa per l'altre.

3.4.1. REPARTIMENT DE FORCES DEL POM DE DALT

Si posem l'exemple d'un castell de tres, veiem que un dos està tancat o dret, és a dir, té els dos peus sobre la mateixa persona, i l'altre està obert o eixancarrat i té un peu a l'espatlla de diferents castellers. Això és així per poder repartir el pes del pom de dalt entre tot el castell i mantenir-lo en equilibri.

Per tal de simplificar els càlculs i la comprensió dels resultats, en lloc de treballar amb la constant de gravetat, utilitzaré les unitats de força en kilopondis (kp). D'aquesta manera, cada quilogram de massa equival directament a un kilopondi de pes, establint una relació d'1 a 1. Això facilita molt interpretació; per exemple, resulta més intuïtiu dir que una persona que suporta 150kp de pes que no expressar-ho en newtons (1470 N), ja que la primera forma és més fàcil d'entendre i d'imaginar.

Si suposem que l'enxaneta té una massa de 25 kg, el seu pes equivaldrà a 25 kp. De la mateixa manera, si l'acotxador té una massa de 22 kg, el seu pes serà de 22 kp.

La força total que han de suportar els dosos serà la suma del pes de l'enxaneta i l'acotxador, és a dir, 47 kp ($25 \text{ kp} + 22 \text{ kp} = 47 \text{ kp}$). Suposant que aquesta força es distribueix entre els dosos, de manera que cadascun suporta 23,5 kp ($47 \text{ kp} / 2 = 23,5 \text{ kp}$). Cada dosos, a més, suposant que té una massa de 30 kg, la qual cosa es tradueix en un pes propi de 30 kp. Si sumem aquest pes al que rep de l'enxaneta i l'acotxador, un dos dret transmetria al pis inferior una força total de 63,5 kp ($23,5 \text{ kp} + 40 \text{ kp} = 63,5 \text{ kp}$). En canvi, un dos aixerrancat (amb cames obertes) distribuïria el seu pes entre les dues rengles que té sota. Així, cada rengla suporta una força de 31,75 kp ($63,5 \text{ kp} / 2 = 31,75 \text{ kp}$).



Figura 18: Repartiment de forces del pom de dalt. Font pròpia

4. FORCES EN UN CASTELL

4.1. LLEIS DE NEWTON APLICADES ALS CASTELLS

4.1.1. PRIMERA LLEI DE NEWTON

“Tot cos roman en repòs o en moviment rectilini uniforme si no actua sobre ell cap força externa.” Segons Isaac Newton en la seva obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1687).

Per tal d'entendre millor aquesta llei i aplicar-la de manera més precisa segons el tipus de moviment, la podem dividir en dues versions diferenciades:

Primera Llei de Newton en translació.

Segons aquesta llei, si un cos rígid o un sistema està en repòs o en moviment rectilini uniforme, continuarà en aquest estat (repòs o moviment rectilini uniforme), a no ser que el sumatori de forces externes que actuen sobre ell no sigui 0.

En el cas del meu estudi de la part pràctica, el que intentaré fer és que la suma de les forces totals externes sobre cada casteller (modelitzat com un sòlid rígid en forma de barra) sigui zero, tant en la component x , com en la y . D'aquesta manera el centre de masses del casteller en qüestió estarà en equilibri de forces i no es desplaçarà. Si ho fes, el castell cauria irreversiblement.

Primera Llei de Newton en rotació.

Aquesta llei parla del comportament de cossos rígids que poden girar al voltant d'un punt o eix, com el centre de masses. Aquesta llei ens diu que, si un cos està en repòs, és a dir, no començarà a girar per si mateix, tret que les forces externes que actuiïn sobre ell generin un moment de força que no es compensi amb altres moments. La suma de tots els moments de força haurà de ser 0 per a que el cos no giri.

4.1.2. SEGONA LLEI DE NEWTON

Aquesta llei diu que la força aplicada a un cos rígid és proporcional a la seva massa per la seva acceleració.

En el meu cas, com ja s'ha dit anteriorment, el meu objectiu és mantenir un equilibri de forces, per la qual cosa no hi haurà acceleració. Si no es compleix aquest equilibri, el casteller s'acceleraria i es desplaçaria, fent que el castell caigués. A nivell de l'equilibri de forces verticals (eix y), els castellers a la base han de generar una força suficient per contrarestar el pes total de tots els castellers que es troben per sobre seu. La base del castell, per tant, ha de suportar grans forces perquè el pes dels castellers superiors no faci que tot el castell s'enfonsi.

4.1.3. TERCERA LLEI DE NEWTON

Aquesta llei diu que quan un cos A exerceix una força sobre un cos B, B respon amb una força igual i de direcció oposada sobre A.

Aquesta llei serà essencial i molt útil en el meu estudi per identificar parells d'acció-reacció entre els castellers que estan en contacte directe (en el mateix pis). Com que les forces són iguals i oposades, no cal gestionar moltes magnituds.

A la pràctica castellera un altre exemple seria: un casteller d'un determinat pis exerceix cap amunt una força oposada a la que li fa el casteller de sobre a causa del pes seu pes sumat al dels que te a sobre, aquestes dues forces iguals i contràries formen una parella d'acció i reacció se'n diuen capaç els castellers de la base exerceixen forces cap amunt per sostenir el pes dels pisos superiors, mentre que aquests exerceixen forces cap avall.

L'existència d'interacció entre aquestes forces és el que permet mantenir l'estabilitat.

4.2. CENTRE DE MASSA

Un concepte fonamental per entendre l'estabilitat d'un castell és el de centre de massa. El centre de massa és el punt en una estructura que es calcula com el promig de la posició de totes les seves masses que el componen i on es pot considerar que el pes total hi està "concentrat". En una estructura complexa com un castell, és recomanable mantenir el centre de massa alineat sobre la base del castell, ja que qualsevol desplaçament significatiu del centre de massa pot provocar una caiguda.

A mesura que es van afegint pisos al castell, el centre de massa es desplaça cap amunt. Això pot fer que el castell sigui més inestable, ja que qualsevol petit moviment en els pisos superiors té un efecte més gran sobre l'equilibri global. Per tant, com més ben posicionats i en línia vertical amb la base estiguin els castellers de pisos superiors millor per mantenir el centre de massa el més alineat amb el centre de la base.

Aquesta alineació precisa entre el centre de massa i la base ajuda a distribuir de manera òptima el pes, evitant que el castell es tombi.

Factors que influeixen en el centre de massa en un castell:

- Alçada i forma: Com més alt és el castell, més alt està el centre de massa i, per tant, més difícil és mantenir l'estabilitat.
- Distribució del pes: Cal col·locar les persones més pesades a la part baixa i les més lleugeres a la part alta per mantenir el centre de massa el més baix possible. A més, normalment les persones més pesants solen ser també les més fortes.

- Simetria: La disposició dels castellers ha de ser simètrica perquè el centre de massa quedi centrat. Si una rengla pesa molt més que una altra, el centre de masses es desplaça cap a ell, i el descentra, fet que podria provocar la inclinació del castell.

4.3. TENSIO

Generalment, entenem la tensió com la força que tendeix a estirar o comprimir un cos o un material. En un castell, els castellers dels nivells superiors i les parts altes de la base experimenten tensió, ja que els seus cossos estan estirats per equilibrar el pes superior cap a baix i la força de reacció inferior cap a dalt. Ambdues forces tendeixen a fer que el casteller es comprimeixi, sinó fos per la tensió interna muscular i òssia que s'aplica a si mateix, tensió que li permet ser considerat com un sòlid rígid. En el meu estudi centraré les forces de tensió només en les que es fan mútuament els braços dels dos castellers agafats del mateix pis a l'estructura d'un dos de 7 net.

La capacitat dels castellers per suportar aquesta força de tensió depèn de la seva postura, la seva força física i l'organització de la colla.

4.4. MOMENTS DE FORÇA

El moment de força (M) es defineix com el producte de la força aplicada (F) per la distància perpendicular (d) respecte a un punt de gir o eix de rotació. S'expressa: $M = F \cdot d$

En el context d'un casteller que forma part d'un castell, el punt de rotació o el punt sobre el qual s'aplica el moment de força sol ser l'eix horitzontal que passa pel centre de masses de cada casteller. Qualsevol força aplicada de manera lateral o no vertical respecte a aquest punt genera un moment que pot causar la rotació o la inclinació de l'estructura.

Per mantenir l'equilibri d'un castell, els moments de força han de ser compensats. Això vol dir que qualsevol força que pugui generar un moviment de torsió cap a un sentit ha de ser contrarestada per una força que ocasioni el moviment de torsió en sentit contrari i mantingui l'equilibri. Aquesta és una situació molt freqüent durant la construcció dels castells, especialment quan els castellers es moeun per arribar a les seves posicions finals o quan l'enxaneta es col·loca a la part superior.

Quan els moments de força que actuen sobre el casteller s'equilibren perfectament, el resultat és un moment nul, és a dir, no hi ha tendència a la rotació, i el casteller es manté estable.

4.5. ENERGIA POTENCIAL

L'energia potencial és l'energia que té un objecte a causa de la seva posició en un camp de forces, normalment el camp gravitatori de la Terra. Aquesta energia està “emmagatzemada” en l'objecte pel fet d'estar en una certa alçada i pot ser alliberada si l'objecte cau o es mou cap avall. Com més alt i més pesi, més energia potencial tindrà.

L'energia potencial es pot calcular amb aquesta fórmula: **$E_p = m \cdot g \cdot h$**

- E_p : energia potencial (joules, J)
- m : massa de l'objecte (kg)
- g : acceleració de la gravetat ($9,8 \text{ m/s}^2$ a la Terra)
- h : alçada respecte a un punt (m)

Pensem en un castell humà. Si mirem l'enxaneta, té molta energia potencial perquè està a una gran alçada respecte a terra. Si caigués, l'energia potencial que té per estar tan alta es convertiria en energia cinètica mentre baixa.

Utilitzem la fórmula: $E_p = 25 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 5 \text{ m} \rightarrow E_p = 1225 \text{ J}$

Això vol dir que l'enxaneta té 1225 joules d'energia potencial per estar a 5 metres d'alçada. Si caigués, aquesta energia es converteix en energia cinètica a mesura que anés caient.

L'energia potencial explica per què és perillós que un casteller caigui desde gran alçada. A mesura que puja en el castell, acumula energia potencial, i si perd l'equilibri, aquesta energia es transforma ràpidament en energia cinètica, fent que l'impacte a terra sigui més fort com més alta sigui la caiguda. Per això, el pom de dalt, a banda de ser els més petits, porten casc.

En física l'energia ni es crea ni es destrueix, només es transforma. En un castell humà:

- L'energia potencial augmenta a mesura que els castellers pugen més alt.
- Si un casteller cau, l'energia potencial es transforma en energia cinètica, que és l'energia del moviment.
- Quan el casteller arriba a la pinya, molt poca part d'aquesta energia es dispersa en forma de so i calor, una altra part important es transforma en l'ona elàstica de deformació a través de la pinya, i la part restant es la que conformarà l'energia de col·lisió en si. Aquesta última part és la que causarà el dany, repartit entre el casteller que cau i al casteller de la pinya que li cau a sobre.

5. CAUSES DE LES CAIGUDES

5.1. PICS DE CÀRREGA I OSCIL·LACIONS

Els castells són estructures dinàmiques, per tant no són constants i varien en tot moment. Estan sotmesos a un seguit de càrregues constants que fan canviar les dimensions, centres de gravetat i, sobretot, les tensions i els esforços que ha de fer cada casteller.

“El pes que suporta un casteller es pot incrementar fins un 150% només pel desequilibri de pocs centímetres de la persona que té damunt.” Segons Rius Orpinell.

Quan un casteller puja o baixa pels pisos del castell pot generar pics de càrrega, que poden arribar a multiplicar per dos o per tres el pes que han d'aguantar els pisos de baix.

Un estudi realitzat pel CAR de Sant Cugat (Centre d'Alt Rendiment de l'esport) diu que la distància entre el cdm del casteller que puja i del company pot arribar a ser de 35 cm i que les velocitats estan entre 0,1 i 0,3 m/s en l'ascens i entre 0,5 i 0,7 m/s a la baixada. Per tant, com més constant sigui la velocitat de pujada i de baixada dels castellers i menys se separi del casteller, menys tensions addicionals s'hauran de generar i menys perill hi haurà en l'estructura.

A més a més, els castells pateixen unes oscil·lacions constants que s'originen als pisos de baix i pugen als de dalt poc a poc pel tronc com si fossin una onada. Aquestes oscil·lacions provoquen una redistribució de càrregues i obliga a afegir forces que passin d'una rengla a l'altre per mitjà dels braços per a mantenir el castell dins de la seva base de sustentació.

5.2. PAS DE L'ENXANETA

El castell és carregat quan l'enxaneta fa l'aleta⁴. Aquest moment és crític perquè hi ha moltes càrregues pel canvi de pes que significa el pas de l'acotxador i l'enxaneta.

Un examen molt clar és en el dos de vuit sense folre, on podem veure que just en el moment en què es fa l'aleta, teòricament, les dues rengles han de suportar la mateixa càrrega. El problema el trobem quan l'enxaneta baixa o puja per una de les dues rengles i l'acotxador ja està col·locat a dalt del castell. En aquest moment, hi ha una rengla que ha de fer un esforç extra per mantenir el castell en equilibri i evitar que es caigui cap a ells. Si a

⁴ Fer l'aleta: Moment en el qual l'enxaneta passa per sobre de l'acotxador i estira el braç amb la mà oberta.

més a més, el pilar pel qual baixarà l'enxaneta ja està desequilibrat abans que aquesta baixi, serà molt fàcil que el castell caigui.

Si posem el cas que l'enxaneta té una massa de 24 kg, és a dir, que pesa 24 kp, i l'acotxador de 21 kg, que equival a 21 kp, en el moment de fer l'aleta, cada rengla haurà de suportar la meitat del pes de l'enxaneta i de l'acotxador ($12 \text{ kp} + 10'5 \text{ kp} = 22'5 \text{ kp}$). Però, quan l'enxaneta es troba pujant o baixant per una rengla, el pes que haurà de suportar aquest costat serà la meitat del pes de l'acotxador més el pes de l'enxaneta ($10'5 \text{ kp} + 24 \text{ kp} = 34'5 \text{ kp}$), mentre que l'altre rengla només suportarà la meitat del pes de l'acotxador.

Tot i això, aquesta metodologia només és vàlida si el castell és un pilar. Durant l'estudi del 2d7 tindrem que els dos pilars poden estar descompensats verticalment i no caure, ja que cada pilar del castell s'aguantava igualment gràcies a l'altre del davant.

5.3. GEOMETRIA DEL CASTELL

Un altre aspecte important és la geometria del castell, ja que moltes vegades es per la verticalitat a l'obrir-se o tancar-se en algún pis. En aquests moments, el pes que s'ha de suportar augmenta i fa més difícil l'estabilitat del castell. Aquests desequilibris són difícils de corregir, ja que els castells són estructures dinàmiques i si no es reequilibren les forces i es compensa el pes ràpidament es poden produir caigudes.

Per tal de fer possible aquesta geometria, cal que la línia traçada des del cdm se situï sobre la base de sustentació. En el cas d'una persona, el cdm es troba al 60% de la seva alçada i la base de sustentació és la planta dels peus.

Les imatges següents són del pd6 carregat a la fira de Vilarodona del 2014 per la CVXV⁵. En la primera imatge, els centres de massa estan quasi alineats i tots sobre la seva base de sustentació, la qual cosa no provoca cap desequilibri. En la segona imatge, veiem que els centres de gravetat continuen sobre la seva base, excepte el del terç, que sembla que vagi a caure enrere. Després, observem que el segon s'inclina cap endavant per contrarestar la força provocada pel terç. A causa d'aquesta força, observem que el cos del segon s'inclina massa cap endavant i el seu centre de gravetat no cau sobre la base, per tant, provoca tal desequilibri que ocasiona la caiguda de la resta de castellers.

⁵ CVXV: Colla Vella dels Xiquets de Valls



Figura 19: Procés de caiguda d'un pd6 marcant els centres i línies de gravetat. Font: serveiseducatiu.xtec.cat

5.4. BIOMECÀNICA: LA LLEI DE LA PALANCA

La biomecànica és la ciència que explica físicament els fenòmens que s'esdevenen en els éssers vius. En els castells, aquesta disciplina estudia, principalment, la càrrega que ha de suportar la columna vertebral dels castellers.

Quan parlem de castells i de causes d'una caiguda, és fonamental comprendre i tenir en compte el concepte de moment de força i la seva relació amb la llei de la palanca.

El moment de força, anomenat anteriorment, es calcula com: $M = F \cdot d$.

Per exemple, si considerem un casteller amb una massa de 40 kg que ha de sostenir una càrrega de 210 kg a sobre, i suposem que no hi ha oscil·lacions, segons la segona llei de Newton la força que rebrà serà de 2100N aprox. ($F = m \cdot g = 210 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 2100\text{N}$).

Això equival a uns 1050N sobre cada espatlla. A més, cal sumar-hi el pes del propi cos (uns 400 N), de manera que la força resultant que han de suportar les seves lumbars arriba a uns 2500N. Tot i així, aquest equilibri perfecte és impossible que passi ja que els castells són estructures dinàmiques i sempre hi ha oscil·lacions i petites descompensacions.

Una palanca està formada per dos moments en sentits oposats. La distància al punt de suport rep el nom de braç de palanca. Així, la condició d'equilibri és: $d_1 \cdot F_1 = d_2 \cdot F_2$

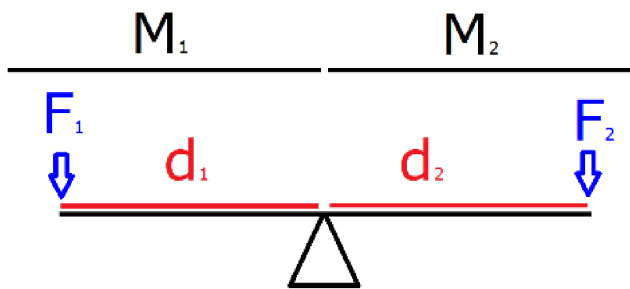


Figura 20: Representació gràfica de la Llei de la Palanca. Font pròpia.

Situacions d'equilibri

En una situació d'equilibri perfecte, les càrregues que rep el casteller estan repartides de manera simètrica respecte al seu eix central:

- Les càrregues de l'esquerra i de la dreta son iguals.
- Les distàncies al punt de suport també són les mateixes.

Això provoca que els moments de força siguin iguals i oposats, de manera que es compensen. $M_1 = M_2$ ($d_1 \cdot F_1 = d_2 \cdot F_2$)

El resultat és que el casteller només suporta el pes real i necessari, sense tensions addicionals. L'alineació vertical i la distribució de equilibrada de càrregues és el que garanteix l'estabilitat del castell segons la llei de la palanca.

Situacions de desequilibri

Quan les càrregues no es distribueixen de manera simètrica, apareix el desequilibri. Això passa si:

- El pes es concentra més en un costat que l'altre
- O bé, encara que les càrregues siguin iguals, la distància al punt de suport és diferent (peu desplaçat).

En aquest cas: $M_1 \neq M_2$ ($d_1 \cdot F_1 \neq d_2 \cdot F_2$)

El costat amb el braç de palanca més llarg genera un moment superior i desequilibra l'estructura. El casteller que aguanta ha de compensar aquest equilibri amb una força muscular addicional, cosa que implica un esforç innecessari i un risc més alt de caiguda.

PART PRÀCTICA

1. ENERGIA POTENCIAL DELS CASTELLERS EN UN CASTELL DE 9

En aquesta primera part de la part pràctica, es duu a terme una anàlisi aplicada dels conceptes teòrics treballats prèviament sobre l'energia potencial dins l'àmbit casteller. A la part teòrica s'ha explicat com aquesta energia depèn de l'altura i de la massa, i com pot ajudar a comprendre la distribució del pes i de les forces dins d'un castell.

L'objectiu d'aquesta part pràctica és quantificar i visualitzar com varia l'energia potencial de cada casteller durant la construcció i la descarregada d'un 3d9f, per tal d'entendre millor com es reparteix l'esforç entre els diferents pisos i com evoluciona el castell des d'un punt de vista físic.

En primer lloc, s'ha fet una estimació de la massa i de la distància respecte al terra de cada casteller, considerant valors aproximats però realistes segons la seva posició final dins del castell:

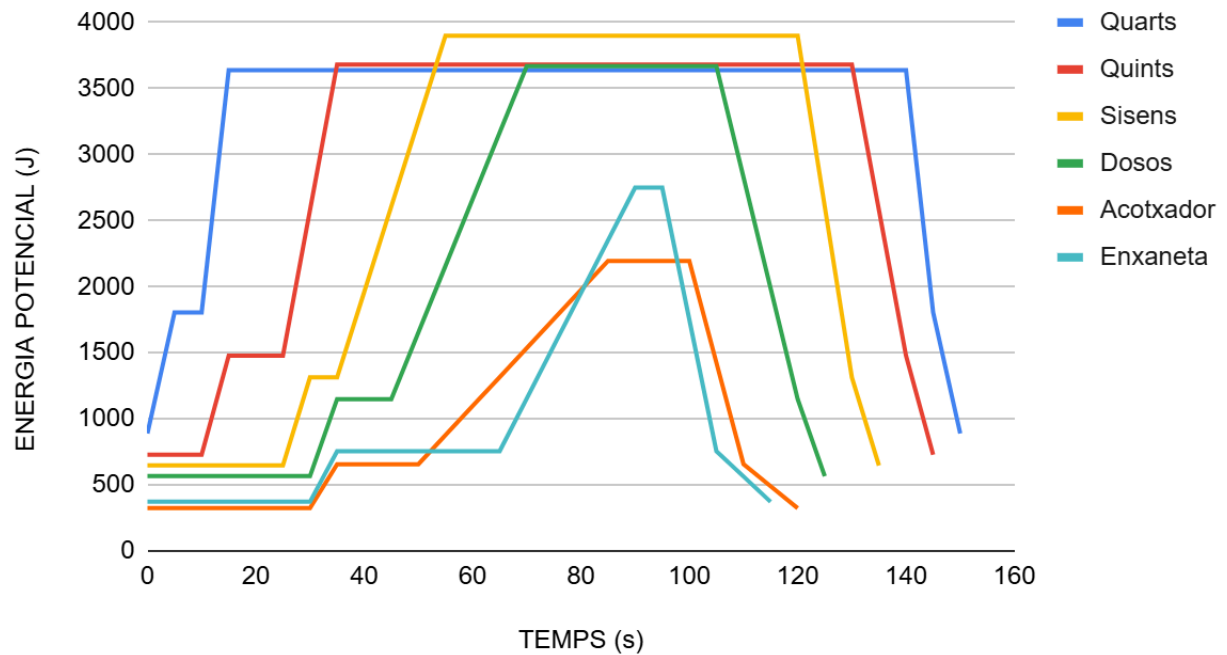
pis	distància del terra (m)	massa (kg)
baixos	1,65	80
segons	3,35	85
terços	5,05	70
quarts	6,75	55
quints	8,35	45
sisens	9,95	40
dosos	10,7	35
acotxador	11,2	20
enxaneta	12,2	23

Posteriorment, s'han analitzat diversos vídeos d'aquesta estructura i a partir d'aquestes observacions, s'ha determinat l'altura aproximada de cada casteller en cada instant i, amb aquestes dades, s'ha pogut calcular la seva energia potencial utilitzant la fórmula:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

A l'Annex 1 es mostra la taula amb l'energia potencial dels castellers d'un 3d9f cada 5 segons.

Amb totes les dades obtingudes, s'ha elaborat la següent taula amb els valors d'energia potencial per a cada segon i cada casteller i s'han representat gràficament.



Aquesta gràfica mostra l'evolució de l'energia potencial dels diferents castellers que formen part d'un tres de nou amb folre (3d9f) al llarg del temps. Es pot observar clarament com, a mesura que es va construint el castell, l'energia potencial de cada nivell augmenta progressivament fins que els castellers arriben a la seva posició definitiva.

En el primer tram del gràfic (de 0 a uns 60 segons aproximadament), les línies corresponents als diferents pisos s'eleva de manera esglaonada. Això representa el moment en què els castellers pugen un darrere l'altre fins ocupar el seu lloc. Com que l'energia potencial depèn de l'alçada i de la massa, com més amunt es troba el casteller, més energia potencial acumula.

Quan el castell està completament carregat, totes les línies es mantenen pràcticament horitzontals durant un període de temps. Aquesta part de la gràfica mostra el moment en què el castell està a punt o descarregant-se: els castellers romanen immòbils a la seva

posició, mantenint l'estructura estable, i per això la seva energia potencial es manté constant.

A continuació, quan comença la descarregada, es veu una disminució progressiva de l'energia potencial en tots els pisos. Les línies baixen de manera ordenada, indicant que els castellers descendeixen del castell i que, per tant, l'energia potencial es redueix fins arribar a la pinya.

Un aspecte interessant que es pot destacar és el cas de l'enxaneta. Tot i ser el casteller que arriba a la posició més alta i, per tant, el què teòricament hauria de tenir més energia potencial, la seva massa és molt menor que la dels altres castellers. Això fa que, en termes absoluts, la seva energia potencial total sigui inferior a la de castellers de pisos més baixos però amb més massa, com ara els quarts o els sisens.

En resum, aquesta gràfica il·lustra com l'energia potencial varia al llarg de la construcció, manteniment i descarregada del castell, posant de manifest la importància tant de l'alçada com de la massa de cada casteller en el conjunt de l'estructura.

2. ESTUDI DE LES FORCES D'UN 2d7 NET

En una segona fase del treball, la meua tutora em va proposar la possibilitat de posar-me en contacte amb la Universitat Rovira i Virgili (URV) per tal d'establir un co-tutoratge i rebre suport en el desenvolupament tècnic d'aquesta part del treball. En aquest context, el Dr. Roger Cabré em va suggerir el plantejament de la part pràctica, una proposta que vaig considerar molt adequada i interessant.

L'objectiu principal és desenvolupar un model físic simplificat d'un 2 de 7 net, és a dir, del tronc d'un 2 de 8, emprant valors mitjans de massa i alçada dels castellers. A partir d'aquestes dades, es pretén determinar les forces que actuen sobre cadascun dels membres del tronc del castell, i, a partir d'aquí, avaluar si l'esforç total aplicat és suficient per mantenir l'estructura estable, o si aquestes forces portarien el castell a caure. L'enfocament adoptat és més teòric, amb la intenció és modelar i simular les forces mitjançant un full de càlcul.

En Dr. Cabré recomanà fer l'estudi d'aquest castell perquè, estructuralment, és un castell senzill i això simplifica molt el problema, ja que si hagués triat un castell amb més rengles, el nombre de variables i incògnites hauria augmentat considerablement.

El model plantejat parteix de la formulació d'un sistema de 34 equacions, cadascuna representant una força diferent que actua sobre els castellers. La resolució d'aquest sistema ens hauria de permetre saber si el castell és viable des del punt de vista físic o si cauria.

2.1. PLANTEJAMENT DEL PROBLEMA

En una primera etapa, cada casteller es modelitza com una barra rígida, sobre la qual actuen tres forces principals:

1. La tensió generada pels braços.
2. La reacció exercida pel casteller situat a sobre.
3. La reacció del casteller situat a sota.

Amb el material del Dr. Cabré es va elaborar un primer esbós basat en una torre de sis pisos, considerant enxaneta i acotxador com un sol cos per simplificar els càlculs. Això va permetre visualitzar millor les interaccions entre castellers.

Seguint les recomanacions d'en Roger, s'establí un angle d'inclinació determinat per a cada casteller, per tal de facilitar la formulació de les equacions. El model resultant és

bidimensional (2D), de manera que només es consideren moviments dins el pla x-y, i els castellers poden girar al voltant de l'eix z, pel seu centre de masses.

Les inclinacions es van exagerar lleugerament amb l'objectiu de mostrar de manera clara les components x i y de les forces, tot i que a la pràctica els castellers estan gairebé verticals. En els càlculs, s'aplicà una inclinació de $\pm 10^\circ$ segons el costat, mentre que el bloc aixecador-enxaneta es manté recte.

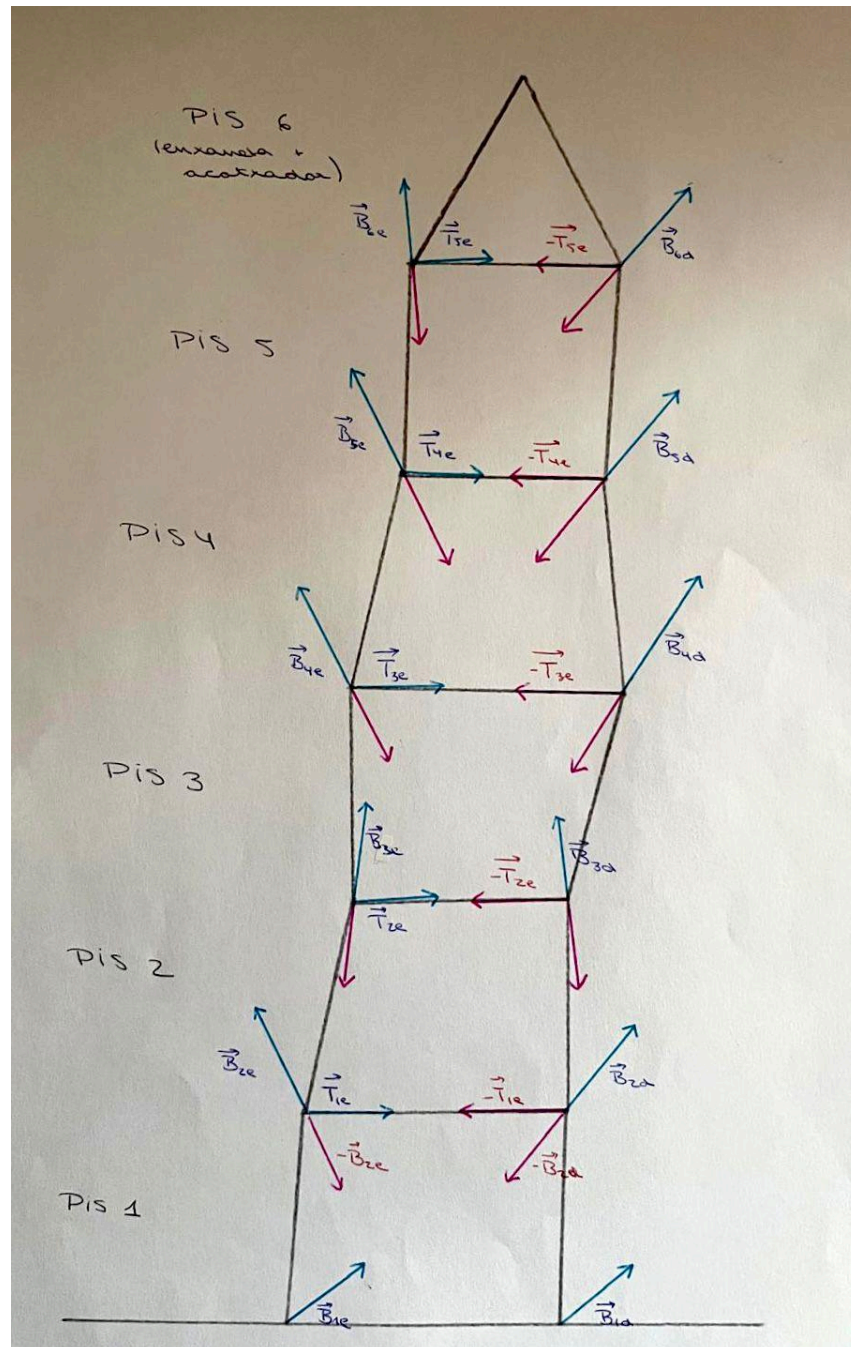


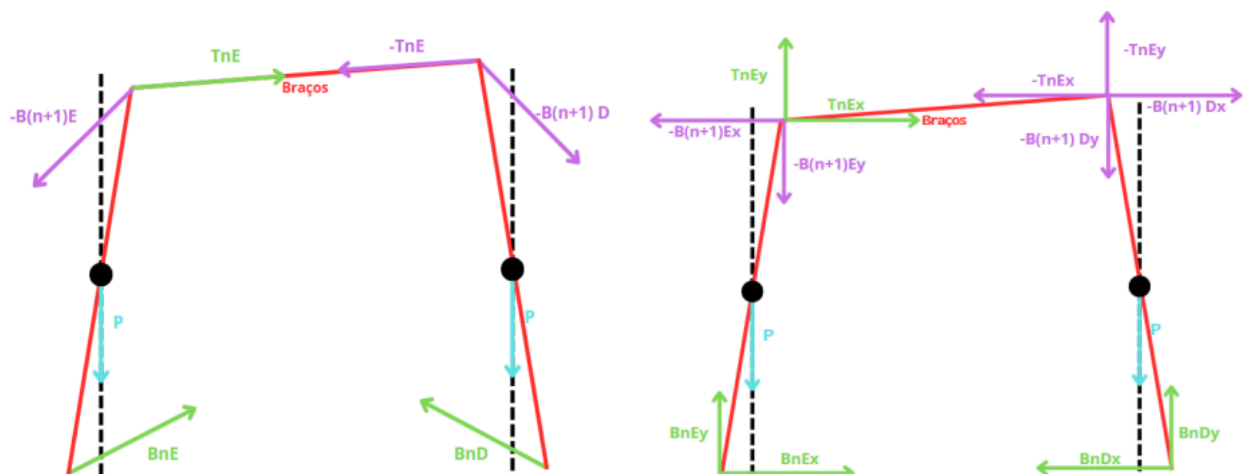
Figura 21: Plantejament de les forces i les seves reaccions. Font pròpia.

2.2. DESENVOLUPAMENT DEL PROBLEMA

En el desenvolupament del problema, primerament s'identifiquen totes les forces que actuen sobre cada casteller. Son les següents:

- **FORÇA B_n** : representa el suport que el casteller rep del casteller que té just a sota. És una força de reacció normal que s'exerceix en el punt de contacte entre els dos castellers. Aquesta força tindrà dos components: x, y .
- **FORÇA $-B(n+1)$** : Aquesta força és la que s'està aplicant a l'espatlla del casteller de sota i lògicament és la reacció de l'anterior a través del contacte que te dels seus peus amb l'espatlla del casteller del pis inferior. Per tant, $B_n = -D(n-1)$. Té també dos components.
- **FORÇA T_n** : Cada casteller del pilar de l'esquerra en el pis n un pis està connectat amb el casteller del mateix pis n del pilar de la dreta mitjançant els braços. Aquesta força, representa la tensió o reacció lateral i de suport mutu entre castellers d'un mateix pis. Aquesta força tindrà dos components: x, y .
- **FORÇA $-T_n$** : Aquesta força igual i però en sentit contrari, és la reacció de l'anterior i s'aplica al casteller de la dreta mitjançant el contacte amb els braços del de l'esquerra.

2.2.1. REPRESENTACIÓ GRÀFICA DE LES FORCES



Figures 22 i 23: Representació de les forces en component x i y . Font: Júlia Ramon Puig

2.2.2. EQUACIONS D'EQUILIBRI

Per resoldre el sistema s'apliquen les condicions d'equilibri estàtic, segons les quals el sumatori de forces i moments sobre cada casteller ha de ser nul per garantir l'estabilitat del castell.

Equilibri dels components horitzontals (eix x): Per a que el castell estigui en equilibri horitzontal, la suma de totes les forces horitzontal ha de ser 0.

$$\sum F_{n,e,x} = B_{n,e,x} + T_{n,e,x} - D_{n+1,e,x} = 0 \text{ pel casteller del pis } n \text{ de l'esquerra}$$

$$\sum F_{n,d,x} = B_{n,d,x} - T_{n,e,x} - D_{n+1,d,x} = 0 \text{ pel casteller del pis } n \text{ de la dreta}$$

Equilibri dels components verticals (eix y): Per a que el castell estigui en equilibri vertical, la suma de totes les forces verticals ha de ser 0.

$$\sum F_{n,e,y} = B_{n,e,y} + T_{n,e,y} - B_{n+1,e,y} = P_{n,e} \text{ pel casteller del pis } n \text{ de l'esquerra}$$

$$\sum F_{n,d,y} = B_{n,d,y} - T_{n,e,y} - B_{n+1,d,y} = P_{n,d} \text{ pel casteller del pis } n \text{ de la dreta}$$

Equilibri de Moments respecte al Centre de Masses (cdm): Per a que el castell no giri, el sumatori dels moments respecte al cdm del casteller ha de ser 0.

$$x_{n,e,peus} B_{n,e,y} - y_{n,e,peus} B_{n,e,x} + y_{n,e,espatlla} (B_{n+1,e,x} - T_{n,e,x}) + x_{n,e,espatlla} (T_{n,e,y} - B_{n+1,e,y}) = 0$$

pel casteller del pis n de l'esquerra.

$$x_{n,d,peus} B_{n,d,y} - y_{n,d,peus} B_{n,d,x} + y_{n,d,espatlla} (B_{n+1,d,x} + T_{n,e,x}) + x_{n,d,espatlla} (-T_{n,e,y} - B_{n+1,d,y}) = 0$$

pel casteller del pis n de la dreta

A l'annex 2 es pot veure la formació de les equacions d'equilibri de moments.

2.3. RESOLUCIÓ DEL PROBLEMA

El sistema resultant consta de 34 equacions i 34 incògnites, que corresponen a les components de les forces que actuen sobre cada casteller. La seva resolució s'efectua mitjançant una matriu de coeficients, ja que la resolució manual seria excessivament laboriosa.

Aquesta taula és una part de la matriu sense valors:

	T5ey	T5ex	B5ey	B5ex	B5dy	B5dx
$F_{ey} = p$						
$F_{dy} = p$						
$F_{ex} = 0$						
$F_{dx} = 0$						
$M_e = 0$						
$M_d = 0$						

Per a resoldre la matriu, se li han de donar valors. Això significa assignar nombres concrets a cada cel·la d'aquesta, representant les forces, pesos i relacions geomètriques entre els castellers del castell.

Cada fila de la matriu representa una part d'una equació d'equilibri, i cada columna correspon a una component d'una força desconeguda que volem calcular.

Per cada equació, s'ha de considerar si la direcció de la força és igual o contrària que la de les altres forces. Això es farà a partir dels valors 1 i -1: 1 si la força va en positiu (en component x, cap a la dreta i en componen y, cap amunt) i -1 si la força va en negatiu (esquerra en la component x i cap avall en la component y).

Per als càlculs dels moments, es necessiten les distàncies entre castellers. Aquestes distàncies es multipliquen per les forces corresponents, i els valors finals s'inclouen a la matriu. Aquest pas es dura a terme multiplicant l'alçada del casteller pel sinus o el cosinus de l'angle.

Quan es té una altura "h" que forma un angle de 10° (0,17 rad) amb la vertical descomponem aquesta dada en:

- Component horitzontal $\rightarrow \mathbf{Hx} = h \cdot \sin(0,17)$
- Component vertical $\rightarrow \mathbf{Hy} = h \cdot \cos(0,17)$

Així doncs, ja es pot completar la matriu de qualsevol pis.

Quedaria de la següent manera:

	T5ey	T5ex	B5ey	B5ex	B5dy	B5dx
Fey = p	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00
Fdy = p	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00
Fex = 0	0,00	1,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Fdx = 0	0,00	-1,00	0,00	0,00	0,00	1,00
Me = 0	0,22	-1,29	-0,22	1,29	0,00	0,00
Md = 0	1,29	0,22	0,00	0,00	-0,22	1,29

Seguint el mateix patró que s'ha utilitzat per a completar aquest pis, s'ha de completar la matriu sencera. S'utilitzaran aquestes dades, que són les que va proporcionar en Roger Cabré, co-tutor d'aquest treball, són una aproximació al més real possible:

PIS	pes (kg)	alçada (m)	angle (°)	angle (rad)	hx (m)	hy (m)
6	50	0,59	0	0,00	-1,01	0,59
5	33	1,29	10	0,17	0,22	1,29
4	50	1,37	10	0,17	0,24	1,37
3	65	1,57	10	0,17	0,27	1,57
2	75	1,5	10	0,17	0,26	1,50
1	85	1,5	10	0,17	0,26	1,48

Els valors d'aquesta taula corresponen al casteller esquerra, pel casteller dret, l'angle és negatiu, per tant els valors de hx i hy seran negatius.

En el cas del sistema aixecador-enxaneta, la taula quedaria de la següent forma:

	B6ey	B6ex	B6dy	B6dx
$f_y = p$	1,00	0,00	1,00	0,00
$f_x = 0$	0,00	1,00	0,00	1,00
$M_e = 0$	-1,01	0,59	0,00	0,00
$M_d = 0$	0,00	0,00	1,01	0,58

Un cop completada la taula amb tots els valors, s'obté una matriu de coeficients que multiplica al vector de les 34 components de les forces de cada casteller que són les variables incògnites. Al producte de la matriu pel vector de components de forces s'igualava al vector columna dels pesos de cada casteller, només apareguts a les equacions d'equilibris de forces verticals.

$$\sum F_{n,e,y} = B_{n,e,y} + T_{n,e,y} - B_{n+1,e,y} = P_{n,e}$$

$$\sum F_{n,d,y} = B_{n,d,y} - T_{n,e,y} - B_{n+1,d,y} = P_{n,d}$$

Tant el vector de pesos com el vector de components de forces seran considerats kilopondis (kp), ja que és una unitat més fàcil d'interpretar que els newtons en aquest cas.

Per resoldre el sistema i obtenir el valor de les incògnites, es multiplicarà per l'esquerra aquest sistema per la matriu de coeficients inversa. Això farà que la matriu inicial es converteixi en una matriu identitat, cosa que simplifica el sistema i ofereix el vector de components de forces aïllat i igualat al producte de la matriu inversa pel vector de pesos, com a resultat.

Un cop feta l'operació, el resultat és un vector que conté els valors de les components de les forces que cada casteller ha d'aplicar per a mantenir l'equilibri.

A la següent pàgina es pot veure la matriu completada. Està dividida en dues parts ja que era molt gran i no cabia sencera en una única imatge.

T3ex	T3ey	B3ex	B3ey	B3dx	B3dy	T2ex	T2ey	B2ex	B2ey	B2dx	B2dy	T1ex	T1ey	B1ex	B1ey	B1dx	B1dy	Pes (kp)
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	33
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	50
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1,000	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	65
	0	-1,000	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	65
	1	0,000	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1	0,000	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-1,55	0,270	1,55	-0,27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1,55	0,270	0	0	1,55	0,27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	75
	0	0,000	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	75
	0	0,000	-1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	1,48	-0,26	0	0	-1,48	0,26	1,48	-0,26	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	1,48	0,26	1,48	0,26	0	0	1,48	0,26	0	0	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	1	0	85
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	85
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	0	0	0	1	0	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	1,48	-0,26	0	0	-1,48	0,26	1,48	-0,26	0
	0	0,000	0	0	0	0	0	0	0	0	1,48	0,26	1,48	0,26	0	0	1,48	0,26
T3ex	T3ey	B3ex	B3ey	B3dx	B3dy	T2ex	T2ey	B2ex	B2ey	B2dx	B2dy	T1ex	T1ey	B1ex	B1ey	B1dx	B1dy	

Amb aquest vector de forces es podrà analitzar si el castell es mantindrà estable o no. Per fer-ho, s'utilitzen els criteris bàsics en funció de les magnituds de les forces i l'equilibri global. D'aquesta manera, es possible decidir si les forces calculades són suficients per assegurar la seguretat del castell o si, al contrari, aquest castell té risc de caure.

2.4. RESULTATS DEL PROBLEMA

Un cop multiplicada la matriu inversa pel vector dels resultats de les equacions s'obtenen les forces que ha de fer cada casteller.

Els resultats obtinguts són els següents:

F (Kp)		F (Kp)		F (Kp)	
B6ex	42.60	T4ex	-7.32	T2ex	-12.34
b6ey	25.00	T4ey	0.00	T2ey	0.00
B6dx	-42.60	B4ex	14.64	B2ex	37.12
B6dy	25.00	B4ey	108.00	B2ey	248.00
T5ex	35.29	B4dx	-14.64	B2dx	-37.12
T5ey	0.00	B4dy	108.00	B2dy	248.00
B5ex	7.32	T3ex	-10.14	T1ex	-14.11
B5ey	58.00	T3ey	0.00	T1ey	0.00
B5dx	-7.32	B3ex	24.77	B1ex	51.22
B5dy	58.00	B3ey	173.00	B1ey	333.00
		B3dx	-24.77	B1dx	-51.22
		B3dy	173.00	B1dy	333.00

Aquests resultats ens mostren que:

Les forces verticals augmenten progressivament des del pis superior fins al pis més inferior, com era d'esperar, a causa de l'acumulació de pesos dels castellers superiors. Els valors màxims es troben al primer pis, que suporta aproximadament un 60% del pes total del castell.

Les forces horitzontals són significativament menors que les verticals, tot i això, normalment són les decisives per saber si el castell cau o no, és a dir, per mantenir l'estabilitat lateral del castell. En aquest model, les tensions màximes es troben al quart i al cinquè pis, amb valors al voltant del 15-20% del pes que suporten en vertical.

La tensió en component vertical (y) és nul·la.

L'anàlisi del vector resultant de forces indica que el sistema es manté estable, ja que totes les components horitzontals i verticals compleixen les condicions d'equilibri estàtic.

2.5. CONCLUSIONS

Un cop resoltes les equacions i analitzats els resultats del model, puc concloure que el comportament del castell respon de manera coherent a les lleis físiques i a la meva intuïció inicial.

Tal com esperava, les forces es distribueixen de forma lògica dins l'estructura i reflecteixen la importància de cada pis en la seva estabilitat global.

Les forces verticals augmenten progressivament des del pis superior fins al més inferior, com era previsible, a causa de l'acumulació del pes dels castellers. També, com ja intuïa des d'un principi, la força de tensió horitzontal que han de fer els castellers és menor que la força vertical, ja que no han de suportar el pes directament, sinó mantenir la posició i la cohesió lateral de l'estructura. La força de tensió vertical és pràcticament nul·la, ja que els braços es mantenen estirats horitzontalment, ni cap amunt ni cap avall, en una posició de "recres"⁶.

M'ha cridat especialment l'atenció comprovar com els pisos centrals tenen un paper més rellevant del que podria semblar a primera vista, ja que contribueixen a equilibrar les càrregues i a mantenir la rigidesa del conjunt. Tot i així, les forces que acostumen a provocar la caiguda d'un castell solen ser les horitzontals, ja sigui per un petit lliscament, una pèrdua d'alineació o un desequilibri lateral.

Els càlculs mostren que el sistema es manté estable i compleix les condicions d'equilibri, fet que confirma que, físicament, el castell analitzat és viable. Tot i això, la realitat és encara més complexa, ja que factors com el moviment, la fatiga o les vibracions no s'han pogut considerar en el model i, probablement, també influeixen de manera significativa en una actuació real.

En conclusió, els resultats s'ajusten a les meves expectatives i confirmen les hipòtesis inicials, alhora que m'han permès aprofundir en la comprensió de l'equilibri i de la complexitat estructural dels castells.

⁶ "Recres": Paraula col·loquial que s'utilitza en l'àmbit casteller per descriure una posició corporal en què els braços estan completament estirats horitzontalment, ni cap amunt ni cap avall.

CONCLUSIONS DEL TREBALL

Després d'haver dut a terme aquest treball de recerca, puc afirmar que la combinació entre el món dels castells i la física ha resultat molt més enriquidora del que havia imaginat inicialment. L'objectiu principal que em vaig proposar —entendre com les lleis físiques expliquen l'estabilitat i la viabilitat d'una estructura tan complexa com un castell— s'ha complert de manera satisfactòria. Al llarg de tot el procés he pogut comprovar que darrere de cada figura castellera hi ha un conjunt de principis científics que, tot i ser invisibles a simple vista, determinen la seva seguretat, la seva solidesa i, en definitiva, el seu èxit.

En primer lloc, aquest treball m'ha permès aprofundir en el funcionament intern dels castells, anant més enllà de la visió tradicional i emocional que en tenia fins ara com a castellera. He pogut constatar que cada part de l'estructura, la pinya, el folre, les manilles, el tronc o el pom de dalt, compleix una funció física concreta i indispensable. L'estabilitat no depèn únicament de la força o la tècnica individual, sinó de com es distribueixen les forces, de com es manté l'alineació entre els pisos i de com es gestiona l'equilibri global del conjunt. En aquest sentit, la física m'ha ajudat a posar nom i explicació a aspectes que els castellers sovint percebem de manera intuïtiva: la importància del centre de massa, la direcció de les tensions o la transmissió de càrregues entre pisos.

Pel que fa a la part pràctica, l'anàlisi del 2d7 net m'ha ofert una oportunitat excepcional per aplicar de manera directa els coneixements teòrics adquirits. El model físic que vaig desenvolupar, amb el suport del co-tutor de la Universitat Rovira i Virgili, ha permès quantificar les forces que actuen sobre els castellers i comprovar empíricament que el castell estudiat és viable des d'un punt de vista mecànic. Els resultats obtinguts han confirmat les hipòtesis inicials: les forces verticals augmenten progressivament des dels pisos superiors fins als inferiors, mentre que les forces horitzontals, tot i ser més petites, són crucials per garantir la cohesió lateral. També s'ha evidenciat que els pisos centrals juguen un paper fonamental en la rigidesa de l'estructura, ja que equilibren les càrregues i eviten oscil·lacions que podrien acabar provocant una caiguda.

Un altre aspecte rellevant que he pogut observar és la diferència entre la teoria i la realitat castellera. Si bé el model matemàtic utilitzat es basa en condicions ideals d'equilibri estàtic, en una actuació real intervenen molts altres factors: el moviment constant, les petites vibracions, la respiració, la fatiga muscular o fins i tot les emocions dels castellers. Tots aquests elements, difícils de quantificar, influeixen en el comportament final del castell. Això m'ha fet comprendre que la física pot explicar gran part del fenomen, però que la part humana, el treball en equip, la confiança i la coordinació, continua essent insubstituïble. Els

castells, per tant, són una demostració perfecta de com la ciència i l'esperit col·lectiu poden convergir per aconseguir un objectiu comú.

Aquest treball també m'ha ajudat a valorar encara més la importància de la ciència aplicada a la cultura popular. Massa sovint es considera que la física és una disciplina allunyada del nostre dia a dia, però aquesta recerca demostra el contrari: els principis físics són presents en totes les activitats que fem, fins i tot en aquelles que percebem com a purament tradicionals o artístiques. Els castells són un clar exemple d'aquesta connexió: darrere d'una imatge d'equilibri i bellesa hi ha càlculs, proporcions, vectors i forces que fan possible l'èxit d'una construcció humana que desafia la gravetat. Entendre-ho des d'aquest punt de vista no només amplia el coneixement científic, sinó que també reforça el respecte per aquesta tradició tan arrelada a la identitat catalana.

A nivell personal, aquest projecte ha estat una experiència de creixement i aprenentatge. M'ha obligat a desenvolupar habilitats d'anàlisi, d'observació i de síntesi, però també m'ha ensenyat a ser constant, a resoldre problemes i a valorar la importància de la col·laboració entre disciplines. He pogut treballar amb metodologia científica, utilitzant conceptes com la força, la tensió o el moment de palanca per descriure fenòmens reals, i això m'ha fet veure la física com una eina viva i útil, capaç d'explicar el món que m'envolta. Al mateix temps, he reforçat el vincle emocional amb el món casteller, redescobrint-lo des d'una perspectiva més racional però igualment apassionada.

Malgrat els bons resultats, també cal reconèixer les limitacions del treball. El model desenvolupat és simplificat i no té en compte alguns aspectes com la variabilitat en les masses individuals, les condicions meteorològiques, el moviment o la dinàmica del conjunt durant la pujada i la descarregada. Una possible línia de continuació d'aquest estudi seria incorporar simulacions més complexes, potser utilitzant programes de modelatge 3D o sensors de força reals col·locats en castellers per obtenir dades experimentals. Això permetria millorar la precisió dels càlculs i acostar encara més la teoria a la realitat.

En definitiva, el treball ha complert els seus objectius: ha posat de manifest la relació directa entre la física i els castells, ha validat la hipòtesi inicial sobre la distribució de forces i ha demostrat que la ciència pot ser una eina valuosa per entendre i preservar les nostres tradicions. Els castells són molt més que una demostració de força o equilibri: són una expressió de cooperació humana, de confiança mútua i d'harmonia amb les lleis de la natura. Des d'aquesta nova mirada, puc afirmar que els castells són una metàfora perfecta del que representa la ciència i la cultura: la recerca constant de l'equilibri, del coneixement i de l'ascens col·lectiu cap al cel.

BIBLIOGRAFIA

Coordinadora de Colles Castelleres de Catalunya. (2016, juliol). *El risc dels castells*.

Recuperat el 15 de març de 2025, de

https://castellersdetortosa.cat/documents/dossier_risc_castells.pdf

Diccionari casteller | TERMCAT. (s. f.). TERMCAT, Centre de Terminologia. Recuperat el 22

de març de 2025, de <https://www.termcat.cat/es/diccionaris-en-linia/2>

Els castells - CCCC. (s. f.). Coordinadora de Colles Castelleres de Catalunya. Recuperat el

22 de març de 2025, de <https://castellscat.cat/ca/els-castells>

Lema casteller. (s. f.). Recuperat el 5 d'abril de 2025, de

<https://blocs.tinet.cat/actac/el-origens-dels-castells/lema-casteller>

Els castells i la seva indumentària. (2010, 24 d'abril). *La vestimenta tradicional catalana*.

Recuperat el 12 d'abril de 2025, de

<https://lavestimentatradicionalcatalana.blogspot.com/2010/04/els-castells-i-la-seva-indumentaria.html>

Parts del castell. (s. f.). Aldea Global. Recuperat el 29 d'abril de 2025, de

https://www.aldeaglobal.net/castellers/castells_parts.htm

Roset i Llobet, J. (2000). *Manual de supervivència del casteller: La ciència al servei de les torres humanes*. Edicions Cossetània. Consultat el 3 de juny de 2025

Sánchez, A. R. I. (2017). *Fer l'aleta, el Museu Casteller de Catalunya a Valls i el procés de patrimonialització del fet casteller*. *Revista d'Etnologia de Catalunya*, 42, 323–333.

Recuperat el 2 de juliol de 2025, de

<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6646213>

Universitat Rovira i Virgili. (s. f.). *L'energia potencial dels castells*. *Castells de Ciència*.

Recuperat el 2 de juliol de 2025, de

<https://castellsciencia.urv.cat/ca/articles/7/l-energia-potencial-dels-castells>

Bofarull, A. (2021, 3 de juliol). *El concepte de Quocient de Càrrega – Portal Casteller*.

Recuperat el 29 de juliol de 2025, de

<https://www.portalcasteller.cat/v2/articles/el-concepte-de-quocient-de-carrega/>

Universitat Rovira i Virgili. (s. f.). Web de la Càtedra URV per a l'Estudi del Fet Castellor.

Recuperat el 10 d'agost de 2025, de

<https://www.urv.cat/ca/societat-empresa/catedres/catedra-urv-per-a-l-estudi-del-fet-casteller/>

Pau Daniel. (2013, 30 de gener). La física del castells [Presentació Prezi]. Recuperat el 16

d'agost de 2025, de <https://prezi.com/uhd0w9kcazqt/la-fisica-del-castells/>

Vara Rojo, A. (2024, 12 de gener). La física als castells (Treball de recerca). Departament de Tecnologia, URV. Recuperat el 15 de setembre de 2025, de

<https://www.urv.cat/media/upload/arxius/1369%20-%20C%C3%A0tedra%20URV%20per-a-l'Estudi%20del%20Fet%20Casteller/tdr%20secund%C3%A0ria/La%20f%C3%ADsica%20als%20castells.%20Aitana%20Vara.pdf>

Servei Educatiu del Tarragonès. (2019, 23 de març). La física dels castells [Entrada al fòrum TRICS]. XTEC. Recuperat el 30 de setembre de 2025, de

https://serveiseducatiu.xtec.cat/tarragones/dinamitzacio/trics/trics13_aterron/

Dan. (2009, 16 d'octubre). Física i castells. Recuperat el 30 de setembre de 2025, de

<https://centpeus.blogspot.com/2009/10/fisica-i-castells.html>

Ramon, J. (2025, gener). La física als castells (Treball de recerca). Universitat Rovira i Virgili. Recuperat el 3 d'octubre de 2025, de

<https://www.urv.cat/media/upload/arxius/1369%20-%20C%C3%A0tedra%20URV%20per-a-l'Estudi%20del%20Fet%20Casteller/tdr%20secund%C3%A0ria/treball%20de%20recerca%20J%C3%83%C2%BAlia%20Ramon%20%20DEFINITIU%206%20gener.pdf>

ANNEXOS**1. TAULA AMB L'ENERGIA POTENCIAL DELS CASTELLERS D'UN 3d9f**

Temps (s)	Castellers					
	Quarts	Quints	Sisens	Dosos	Acotxador	Enxaneta
0	889,35	727,65	646,8	565,95	323,4	371,91
5	1805,65	727,65	646,8	565,95	323,4	371,91
10	1805,65	727,65	646,8	565,95	323,4	371,91
15	3638,25	1477,35	646,8	565,95	323,4	371,91
20	3638,25	1477,35	646,8	565,95	323,4	371,91
25	3638,25	1477,35	646,8	565,95	323,4	371,91
30	3638,25	2579,85	1313,2	565,95	323,4	371,91
35	3638,25	3682,35	1313,2	1149,05	656,6	755,09
40	3638,25	3682,35	1960	1149,05	656,6	755,09
45	3638,25	3682,35	2606,8	1149,05	656,6	755,09
50	3638,25	3682,35	3253,6	1653,26	656,6	755,09
55	3638,25	3682,35	3900,4	2157,47	876,4	755,09
60	3638,25	3682,35	3900,4	2661,68	1096,2	755,09
65	3638,25	3682,35	3900,4	3165,89	1316	755,09
70	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	1535,8	1154,05
75	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	1755,6	1553,01
80	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	1975,4	1951,96
85	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	2195,2	2350,92
90	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	2195,2	2749,88
95	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	2195,2	2749,88
100	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	2195,2	1752,49
105	3638,25	3682,35	3900,4	3670,1	1425,9	755,09
110	3638,25	3682,35	3900,4	2829,75	656,6	563,5
115	3638,25	3682,35	3900,4	1989,4	490	371,91
120	3638,25	3682,35	3900,4	1149,05	323,4	0
125	3638,25	3682,35	2606,8	565,95	0	0
130	3638,25	3682,35	1313,2	0	0	0

135	3638,25	2579,85	646,8	0	0	0
140	3638,25	1477,35	0	0	0	0
145	1805,65	727,65	0	0	0	0
150	889,35	0	0	0	0	0

2. GENERACIÓ DE LES EQUACIONS D'EQUILIBRIS DE MOMENTS

Posició dels peus i de l'espatlla de cada casteller.

Els vectors de posició de peus i espatlla de cada casteller respecte el seu centre de masses (cdm), suposat aquest al mig del seu cos, és defineix com

$$\vec{R}_{n,e,espatlla} = (x_{n,e,espatlla}, y_{n,e,espatlla}, 0) \quad (1)$$

$$\vec{R}_{n,e,peus} = (x_{n,e,peus}, y_{n,e,peus}, 0) \quad (2)$$

I òbviament només tenen components x i y (les del plànol del dibuix).

Si el casteller del pis n a l'esquerra (per exemple) té una alçada $h_{n,e}$ de peus a espatlla (no considerem el seu cap) i un angle d'inclinació en el castell d'un angle de $\theta_{n,e}$ respecte la vertical i positiu cap a la dreta, llavors les components x i y dels vectors $\vec{R}_{n,e,espatlla}$ i $\vec{R}_{n,e,peus}$, són per trigonometria simple:

$$x_{n,e,espatlla} = \frac{1}{2}h_{n,e} \cdot \sin\theta_{n,e} \quad (4)$$

$$y_{n,e,espatlla} = \frac{1}{2}h_{n,e} \cdot \cos\theta_{n,e} \quad (5)$$

$$x_{n,e,peus} = -\frac{1}{2}h_{n,e} \cdot \sin\theta_{n,e} = -x_{n,e,espatlla} \quad (6)$$

$$y_{n,e,peus} = -\frac{1}{2}h_{n,e} \cdot \cos\theta_{n,e} = -y_{n,e,espatlla} \quad (7)$$

Moments de força sobre cada casteller.

El moment de forces exercit sobre el centre de masses (cdm, suposat al mig del cos) del casteller del pis n a l'esquerra es descompon en tres components, corresponents a cadascuna de les tres forces exercides sobre cada casteller.

$$\vec{M}_{n,e,total} = \vec{M}_{n,e,peus} + \vec{M}_{n,e,espatlla} + \vec{M}_{n,e,braços} \quad (8)$$

On $\vec{M}_{n,e,peus}$ és deguda a la força als peus, $\vec{B}_{n,e} = (B_{n,e,x}, B_{n,e,y}, 0)$, del casteller del pis n a l'esquerra, la reacció de la qual és la que rep a l'espatlla, $\vec{D}_{n-1,e} = -\vec{B}_{n,e}$, el casteller de sota (pis n-1, esquerra).

Per tant:

$$\vec{M}_{n,e,peus} = \vec{R}_{n,e,peus} \times \vec{B}_{n,e} \quad (9)$$

Com tant $\vec{R}_{n,e,peus}$, com $\vec{B}_{n,e}$ tenen només components en el pla del dibuix (x i y), llavors el moment $\vec{M}_{n,e,peus}$ que surt de fer el producte vectorial de dos, té només component perpendicular al pla, és a dir només component z. Segons la descomposició en components del producte vectorial, la component z serà

$$M_{n,e,peus,z} = x_{n,e,peus} \cdot B_{n,e,y} - y_{n,e,peus} \cdot B_{n,e,x} \quad (10)$$

On $\vec{M}_{n,e,espatlla}$ és deguda a la força a l'espatlla, $\vec{D}_{n,e} = (D_{n,e,x}, D_{n,e,y}, 0)$, del casteller del pis n a l'esquerra, que és la reacció de la dels peus, $\vec{D}_{n,e} = -\vec{B}_{n+1,e}$, del casteller de sobre (pis n+1, esquerra).

Per tant, igual que abans:

$$\vec{M}_{n,e,espatlla} = \vec{R}_{n,e,espatlla} \times \vec{D}_{n,e} = -\vec{R}_{n,e,espatlla} \times \vec{B}_{n+1,e} \quad (11)$$

Com tant $\vec{R}_{n,e,espatlla}$, com $\vec{B}_{n+1,e}$ tenen només components en el pla del dibuix (x i y), llavors el moment $\vec{M}_{n,e,espatlla}$ que surt de fer el producte vectorial de dos, té només component perpendicular al pla, és a dir només component z. Segons la descomposició en components del producte vectorial, la component z serà

$$\begin{aligned} M_{n,e,espatlla,z} &= x_{n,e,espatlla} \cdot D_{n,e,y} - y_{n,e,espatlla} \cdot D_{n,e,x} = x_{n,e,espatlla} \cdot (-B_{n+1,e,y}) - y_{n,e,espatlla} \cdot (-B_{n+1,e,x}) \\ &= y_{n,e,espatlla} \cdot B_{n+1,e,x} - x_{n,e,espatlla} \cdot B_{n+1,e,y} \end{aligned} \quad (12)$$

On $\vec{M}_{n,e,braços}$ és deguda a la força als braços, $\vec{T}_{n,e} = (T_{n,e,x}, T_{n,e,y}, 0) =$, del casteller del pis n a l'esquerra, que és la reacció de la dels braços, $\vec{T}_{n,d} = -\vec{T}_{n,e}$, del casteller del seu costat del mateix pis (pis n, dreta), per tant, igual que abans i tenint en compte que la força als braços s'aplica a la mateixa alçada que l'espalla.

Per tant, com abans:

$$\vec{M}_{n,e,braços} = \vec{R}_{n,e,espalla} \times \vec{T}_{n,e} \quad (13)$$

Com tant, $\vec{R}_{n,e,espalla}$ com $\vec{T}_{n,e}$ tenen només components en el pla del dibuix (x i y), llavors el moment $\vec{M}_{n,e,peus}$ que surt de fer el producte vectorial de dos, té només component perpendicular al pla, és a dir només component z. Segons la descomposició en components del producte vectorial, la component z serà:

$$M_{n,e,braços} = x_{n,e,espalla} \cdot T_{n,e,y} - y_{n,e,espalla} \cdot T_{n,e,x} \quad (14)$$

Finalment sumant les tres components del moment, surt el moment total en component z:

$$\begin{aligned} M_{n,e,total,z} &= M_{n,e,peus,z} + M_{n,e,espalla,z} + M_{n,e,braços,z} = \\ &= (x_{n,e,peus} \cdot B_{n,e,y} - y_{n,e,peus} \cdot B_{n,e,x}) + (y_{n,e,espalla} \cdot B_{n+1,e,x} - x_{n,e,espalla} \cdot B_{n+1,e,y}) \\ &\quad + (x_{n,e,espalla} \cdot T_{n,e,y} - y_{n,e,espalla} \cdot T_{n,e,x}) \end{aligned} \quad (15)$$

Ajuntant termes amb la mateixa coordenada x o y:

$$\begin{aligned} M_{n,e,total,z} &= \\ &= x_{n,e,peus} B_{n,e,y} - y_{n,e,peus} B_{n,e,x} + y_{n,e,espalla} (B_{n+1,e,x} - T_{n,e,x}) + x_{n,e,espalla} (T_{n,e,y} - B_{n+1,e,y}) \end{aligned} \quad (16)$$

Per equilibri, aquest moment ha de ser zero, per tant escriurem:

$$x_{n,e,peus} B_{n,e,y} - y_{n,e,peus} B_{n,e,x} + y_{n,e,espalla} (B_{n+1,e,x} - T_{n,e,x}) + x_{n,e,espalla} (T_{n,e,y} - B_{n+1,e,y}) = 0 \quad (17)$$

Pel casteller de la seva dreta passen coses similars, només cal canviar e (d'esquerra) per d (de dreta)

$$x_{n,d,peus} B_{n,d,y} - y_{n,d,peus} B_{n,d,x} + y_{n,d,espalla} (B_{n+1,d,x} - T_{n,d,x}) + x_{n,d,espalla} (T_{n,d,y} - B_{n+1,d,y}) = 0$$

Però posant $\vec{T}_{n,d}$ com a reacció, tot canviant de signe, de $\vec{T}_{n,e}$

$$x_{n,d,peus} B_{n,d,y} - y_{n,d,peus} B_{n,d,x} + y_{n,d,espatlla} (B_{n+1,d,x} + T_{n,e,x}) + x_{n,d,espatlla} (-T_{n,e,y} - B_{n+1,d,y}) = 0 \quad (18)$$

En resum, (17) i (18) són les equacions finals d'equilibri de moments que hem de plantejar, pels castellers de l'esquerra i de la dreta respectivament.