# LA MÚSICA DELS NOMBRES

## Dels harmònics als fractals


**CÈLIA-XUE MIRÓ PÉREZ**

**Tutora: Misericòrdia Nomen**

Institut Salvador Vilaseca

2n Batxillerat. Curs 2017-18

*Les matemàtiques són la música de la raó.*

(James Joseph Sylvester)

## AGRAÏMENTS

Primer m'agradaria donar les gràcies a la meva tutora del treball de recerca, per ensenyar-me la part més matemàtica del treball, pels seus consells i aportacions.

També, i molt especialment, a l'Àlex Sansó, professor de música del Conservatori de Reus, que m'ha ajudat a entendre i a gaudir d’altres aspectes sobre la música que tenen a veure amb la seva estructura i que m’han obert un nou tema de reflexió.

Vull agrair també la col·laboració de Ramon Humet, el meu professor d’harmonia al conservatori de Vila-seca. Els seus coneixements sobre fractals també m’han estat molt útils.

Per últim, als meus pares, pel seu suport.

## Índex

# 1. PRÒLEG

Des de sempre m'ha agradat la música. Estudio música des de que era ben petita perquè els meus pares van considerar que era important per a la meva formació. Això m'ha condicionat bastant, fins al punt que ara la música forma part de mi. Per això, en pensar el tema del Treball de Recerca, tenia clar que la música havia de ser-hi present. Però no tot va ser fàcil, primer per la necessitat d'organitzar molt bé el temps, i sobretot, perquè em va costar aconseguir una estructura clara del treball. Durant l'estiu vaig estar anant a classes extres de música amb l'Àlex Sansó, professor del conservatori de Reus. Amb ell vaig aprendre molt sobre les relacions de les matemàtiques i la música. Tot això va constituir la feina prèvia i necessària per tal de poder posar-me a redactar el treball que presento tot seguit.

## INTRODUCCIÓ

El meu treball parteix d'una petita recerca sobre la relació entre la música i els fractals. L'**objectiu general** és mirar de comprendre bàsicament el concepte de fractal i la seva aplicació a la música en diversos períodes. Per a poder assolir aquest objectiu, he estructurat el treball en les següents parts:

**Part teòrica:**

1a part: Sobre l'origen i desenvolupament de la relació música/matemàtiques: Des dels grecs (Pitàgores), l'harmonia, la proporció, l'equilibri, la fraccionalitat, formen part de la música. Hi ha diversos exemples d'això al llarg de la història. En aquesta primera part del treball me n'ocupo de l'escala pitagòrica, el cercle de quintes o la sèrie Fibonacci i les seves peculiaritats.

2a part: És una reflexió sobre el concepte de fractal, definició i tipus de fractals. Com podrem veure, ens referim a un concepte matemàtic que podem trobar en les arts, però també en la pròpia natura o en el so, cosa que ens aproxima a la tercera part del treball. Descriure les característiques dels fractals és l'objectiu fonamental d'aquesta part, per tal de poder posteriorment relacionar-les amb la música.

3ª part: En aquesta part, mostro com podem aplicar el concepte de fractal a la música, distingint clarament dues subparts: Com podrem veure, abans dels anys 80 del passat segle no es pot parlar pròpiament de fractal, donat que el concepte el devem a B. Mandelbrot. Per tant, tota la música anterior a ell no es pot dir que sigui fractal, sinó que segueix alguna de les característiques que són pròpies dels fractals tal i com van ser definits per Mandelbrot l'any 1975. Tenint en compte això, buscarem exemples de peces musicals en què podem trobar algunes de les característiques atribuïdes posteriorment als fractals.
A partir de Mandelbrot, parlarem molt breument de dos autors que podríem dir que conformen dues tendències: Aquells que fan música de caràcter fractal, però composta de manera tradicional (Ligeti) i aquells altres (Xenakis) que obriran camí a una nova forma de música: la música fractal composta amb sintetitzadors o programes fets amb aquest objectiu. Aquest darrer tipus de música, però, ja no és objecte del meu treball.

**Part pràctica**:

En aquest treball, la part pràctica no és un apèndix apart, sinó que s'inclou en la part teòrica. Consisteix en la recerca i l'anàlisi d'algunes peces en què podem trobar característiques fractals. He creat un canal de Youtube amb la interpretació de petits fragments. S'hi pot accedir a ells a través d'uns codis QR que es troben en el lloc del treball on faig referència a cadascuna de les peces. L'objectiu d'aquesta part és mostrar interpretativament les característiques dels fragments que exposo a la part teòrica

**Metodologia del treball:**

Per fer la part teòrica, la metodologia emprada ha estat fonamentalment de recerca bibliogràfica. Ho he complementat amb l'ús d'un programa de gestió bibliogràfica ***(Mendeley*).**

Pel que fa a la part pràctica, a més dels meus coneixements musicals he fet servir els següents recursos **TIC**: ***Youtube*** per a crear un canal; una aplicació generadora i una altra lectora de codis QR ***(Generadora Tapmedia i*** **Crafter** respectivament)**;** un escurçador o opimitzador d'adreces web ***(Bit.ly URL Shortener and Link Management Platform*)** i una altre que fractalitza imatges ***(Fractalizer*)**. A la bibliografia es referencien amb més detall aquests recursos TIC.

# 2. MATEMÀTIQUES EN LA MÚSICA

La relació entre música i matemàtiques és innegable.

El llenguatge musical és harmonia, proporció, relació numèrica, conceptes tots ells matemàtics. Ja Pitàgores (s. VI a.c) va establir una relació entre les notes musicals i les proporcions entre les longituds de cordes tensades. Ho veurem tot seguit. (Ibaibarriaga, 2004)

## 2.1. PITÀGORES I L'ESCALA PITAGÒRICA

Pitàgores va ser un gran filòsof i matemàtic grec del segle VI-V aC.

Els pitagòrics van observar que algunes propietats dels éssers poden ser expressades de forma matemàtica. Així, van considerar que els nombres no són un símbol de la realitat, sinó que constitueixen la seva estructura. Però el descobriment en l'àmbit musical més important aportat per Pitàgores fou l'afirmació de que els intervals entre notes poden ser formulats numèricament de forma que l'altura del so depèn de la longitud de la corda i és possible realitzar la representació de l'escala amb raons numèriques. Així doncs, podem afirmar que ja per als pitagòrics, en la música resulta essencial la determinació numèrica. Tal era la fascinació pitagòrica per aquesta relació entre els nombres, les proporcions i la música, que van arribar a establir una relació entre la música i l'Univers, afirmant que la separació entre els planetes era harmònica, de manera que la separació entre cadascun d'ells equivalia a la que existeix entre les notes de l'escala musical. Això proporcionava a l'Univers harmonia, i música (la música celestial) que produïen els planetes amb el seu moviment.

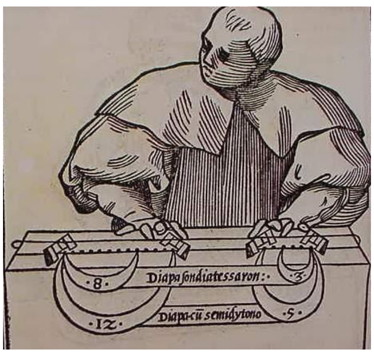
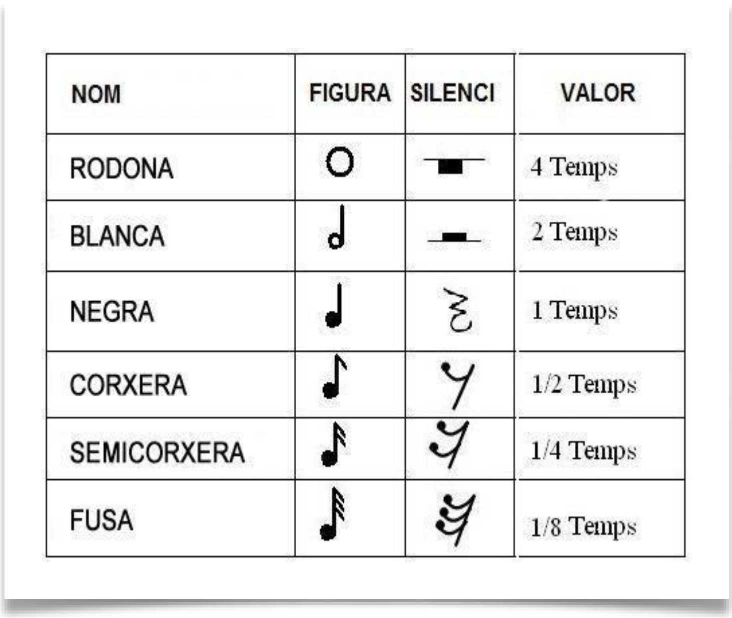



Figura 1: Pitàgores i el Monocordi

Pitàgores feia els seus experiments numèrico-musicals amb un instrument d'una sola corda, el monocordi, que per ell no era un instrument musical sinó un aparell científic per verificar la seva teoria musical.
Amb aquest instrument va descobrir que el nombre de vibracions d'una corda és inversament proporcional a la seva llargada, és a dir, que una corda llarga produeix menys vibracions que una de curta i que, per tant, com més llarga sigui una corda més greu sonarà i com més curta, més agut. També va establir numericament la part de corda que s'ha de fer sonar per produir un interval determinat respecte del so principal, és a dir, les relacions numèriques entre els diferents graus de l'escala major.
Si es dividia la corda per la meitat, s'obtenia un interval d'una octava respecte a la nota original en deixar sonar la corda a l'aire, perquè la freqüència de la nota es duplicaria (2:1). Si aquesta meitat de la corda es dividís novament per la meitat, s'obtindria una nota dues octaves més aguda a la nota original, és a dir, que la seva freqüència es multiplicaria per 4 (4:1). Pitàgores també va trobar altres ràtios com ara la de la quarta justa (3:4) i la de la quinta (2:3), les més consonants, com veurem a continuació en parlar de la música entesa com a fraccions. Les fraccions són una part fonamental en la música: les figures amb les quals s'escriuen les notes musicals tenen entre sí una relació que ve donada per potències de 2.



| NOM | FIGURA | SILENCI | VALOR |
|---|---|---|---|
| RODONA | 𝅝 | 𝄻 | 4 Temps |
| BLANCA | 𝅗𝅥 | 𝄼 | 2 Temps |
| NEGRA | ♩ | 𝄽 | 1 Temps |
| CORXERA | ♪ | 𝄾 | 1/2 Temps |
| SEMICORXERA | 𝅘𝅥𝅯 | 𝄿 | 1/4 Temps |
| FUSA | 𝅘𝅥𝅰 | 𝅀 | 1/8 Temps |

Figura 2: Valors de les notes musicals i els seus silencis

El primer que apareix en un pentagrama és la clau, que indica la posició de cada nota, després ve l'armadura que indica la tonalitat en què estem i després ja apareix el compàs, que s'expressa en forma de fracció. El seu denominador indica quina és la figura que s'utilitza com a unitat de temps i el numerador indica quantes figures completen cada divisió del temps.

També s'utilitzen les fraccions en l'afinació pitagòrica. Els experiments de Pitàgores amb el monocordi van portar a un mètode d'afinació amb intervals amb raó d'enters.

L'escala pitagòrica s'estructura sobre dos intervals: la octava, que presenta una relació de freqüències entre les notes de 2/1 i la quinta, de relació de freqüències 3/2. Els pitagòrics van obtenir els diferents sons de l'escala encadenant quintes apel·lant després a la "cancel·lació d'octaves" per a situar aquestes notes en el rang buscat.
Les raons que s'estableixen entre els diferents sons depenen de les longituds de les seves cordes:

| **Interval** | **Raó** | **Nomenclatura** |
|---|---|---|
| Fonamental→ octava | 1/2 | Octava o diapasó |
| Fonamental→ cinquena | 2/3 | Quinta o diapente |
| Fonamental→ quarta | 3/4 | Quarta o diatessaron |

Amb aquestes raons podem operar matemàticament. Observem que si multipliquem les raons de la quinta i de la quarta entre sí, obtenim l'octava:
**2/3 * 3/4 = 1/2**

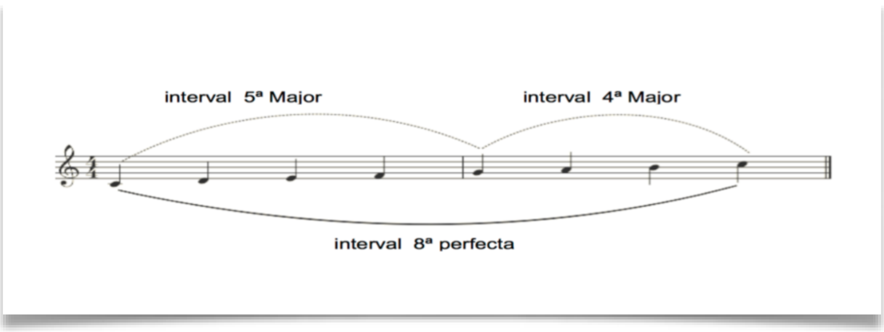



Figura3: formació de l'interval de 8a

## 2.2. EL CERCLE DE QUINTES: la coma pitagòrica i la quinta del llop

Per poder entendre el cercle de quintes hem d'explicar prèviament què són els harmònics i com s'obtenen a partir de relacions matemàtiques.

Els harmònics són els sons que acompanyen un so fonamental. Estan relacionats amb el so fonamental per un nombre enter de vegades la freqüència d'aquest. Seguidament explicaré com calcular les freqüències a partir dels harmònics.

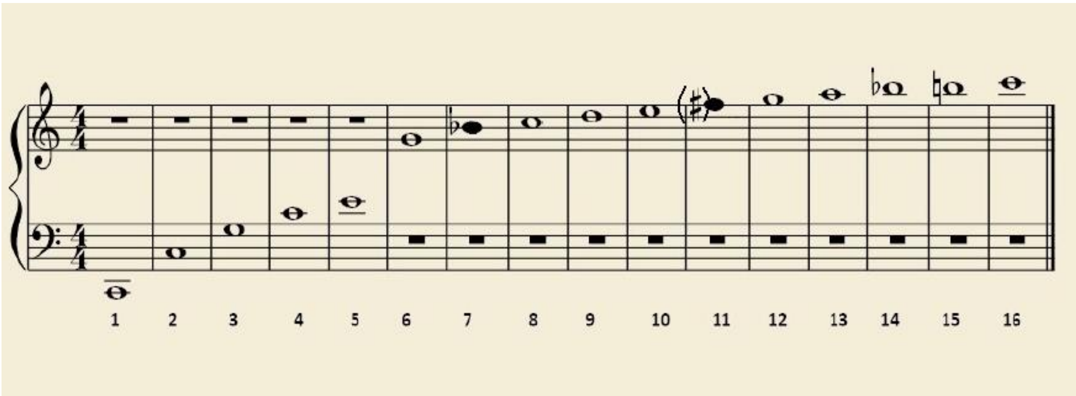



Figura 4: harmònics

Per exemple partint del *la*, perquè sabem que el *la* té freqüència 440 Hz, si volem calcular la freqüència d'una quinta per sobre, és a dir, un *mi*, haurem de fer: freqüència 440 multiplicat per 3/2, que és una distància de quinta, i ens donarà 660 Hz. D'aquesta manera es poden calcular les freqüències de tots els harmònics de *do*.

| **NOTA** | **FREQÜÈNCIA** |
|---|---|
| Do | 261'63 |
| Re | 293'66 |
| Mi | 329'63 |
| Fa | 349'23 |

| | |
|---|---|
| Sol | 392’00 |
| La | 440’00 |
| Si | 493’88 |
| Do | 523’25 |

Com hem vist anteriorment, l’escala pitagòrica està formada per 12 sons. Si comptem els intervals de cinquena i les octaves que hi ha de diferència entre el *do* que considerem fonamental i el *do* que ens resulta d’anar pujant quintes, ens adonem que tenim un total de 12 quintes i 7 octaves.

Si ho plantegem en forma de cercle continuant l’encadenament de quintes formarem l’anomenat cercle de quintes i resulta que la suma de les 12 quintes no coincideix amb la suma de les 7 octaves que hi correspondrien, sinó que la sobrepassa una miqueta.

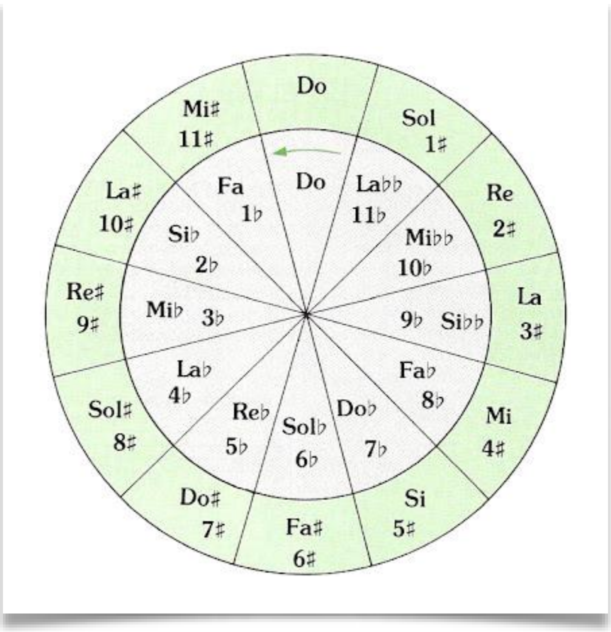



Figura 5: cercle de quintes

https://www.youtube.com/watch?v=0WQjLCXFm7A

Per què sobrepassa l'interval? En ascendir una quinta de *si* s'arriba al *fa#,* i aquest hauria de ser el mateix so que el d'un *solb* agafat per l'altre extrem després d'haver fet els càlculs. Però aquests dos sons no són exactament iguals; la diferència entre el *fa#* i el *solb* es denomina *coma pitagòrica*.

De la mateixa manera que els sons de *fa#* i *reb* no es troben a distància d'una quinta justa, sinó que formen un interval que varia en una coma pitagòrica, aquesta quinta lleugerament més petita s'anomena ***quinta del llop****.*

Al segle XVII, els modes majors i menors van substituir als modes eclesiàstics fonamentats en les escales clàssiques gregues i és llavors quan va aparèixer el problema de les comes pitagòriques. Explicarem aquesta qüestió de forma més clara tot seguit:

En el sistema pitagòric, cada octava tenia 19 notes (*do, #do, reb, mi*…) això provocava problemes en els instruments d'afinació fixa, com ara un piano, perquè si s'afinaven totes les notes a partir d'una tonalitat, només es podien tocar peces d'aquella tonalitat i si es volia canviar la tonalitat s'havia d'afinar el teclat de nou. Per això el sistema modern tonal, instaura els modes majors i menors.

Per això Zarlino[1] al Renaixement va instaurar el nou mètode d'afinació, l'**escala temperada desigual**, la qual feia una tria d'alteracions, i funcionava en unes poques tonalitats, modulant a tons propers del qual estava afinat l'instrument. Però a la pràctica van sorgir problemes si es volia anar a una tonalitat més llunyana. (Hi havia la quinta del llop).

Llavors al Barroc es va introduir l'afinació temperada igual, que elimina les comes dels sistemes anteriors i les quintes del llop. Molts historiadors de la música atribueixen la invenció del sistema temperat igual a Johann Sebastian Bach (1685-1750), altres a Bartolomé Ramos de Pareja, i segurament apareixeran altres noms, però el més important és el gran canvi que va suposar. Es va dividir matemàticament l'octava en 12 parts iguals. Per poder fer això, es renuncia a la precisió de les quintes. En aquest sistema, 12 quintes justes sobrepassen a 7 octaves, per tant hi ha notes enharmòniques, que són notes amb diferent nom però mateix so. En ser la freqüència de cada octava el doble de l'anterior, la distància entre cada semitó serà l'arrel dotzena de 2, és a dir 1'0594631. Per tant es va poder

[1] (Chioggia, 1517 - Venècia, 1590). Compositor i teòric musical italià

modular lliurement a diferents tonalitats.

Podem trobar diverses composicions musicals relacionades amb el cercle de quintes, com ara els *24 preludis i fugues de Bach*, on les diverses peces van pujant cromàticament passant per tot el cercle de quintes. Bach va voler crear aquest conjunt de preludis i fugues, també coneguts com a *El clave ben temperat*, per demostrar que el sistema temperat era vàlid en totes les tonalitats i es podien tocar totes les peces sense necessitat d'afinar l'instrument cada vegada que modulava de tonalitat.

Més tard, Frédéric Chopin inspirat en l'obra de Bach, va compondre també 24 preludis, però aquests anaven per ordre del cercle de quintes. És a dir el primer preludi està en *Do M*, després passa al seu relatiu *La m*, després a *Sol M*, que és una quinta més a partir de *Do*, posteriorment va a *Mim*, el relatiu menor de *Sol M* i així successivament.

## 2.3. SUCCESSIÓ DE FIBONACCI

Aquesta successió va ser descrita i donada a conèixer a l'occident pel gran matemàtic europeu de l'edat mitjana, Leonardo de Pisa (1175-1250).

Leonardo de Pisa era fill de Bonaccio, per això es va fer conèixer com a Fibonacci. En el seu llibre "*Liber Abaci*" (1202) va introduir l'ús dels nombres àrabs que ara fem servir i va plantejar el famós problema dels conills que va donar lloc a la successió que porta el seu nom: (Soler, 2003)

> *"Un parell de conills (que acaben de néixer) queden confinats en un espai tancat. Aquest parell, i cada parell següent, té un nou parell de conills cada mes, començant al segon mes de vida. Quants parells hi haurà al cap d'1, 2, 3,... mesos suposant que la mortalitat és nul·la?"*

Al començament del 1r mes hi seguirà havent una parella en total, al final del 1r mes també hi haurà una parella (1+0=1), al final del 2n mes hi haurà 2 parelles en total (1+1=2), al final del 3r mes hi haurà 3 parelles en total (2+1=3), al final del 4t mes hi haurà 5 parelles en total (3+2=5), al final del 5è mes hi haurà 8 parelles en total (5+3=8), al final del 6è mes hi haurà 13 parelles en total (8+5=13).

Cada número a partir del tercer s'obté sumant els dos que el precedeixen. Si dividim dos termes consecutius de la successió, el major dividit pel menor, obtenim això: 1:1=1; 2:1=2; 3:2=1'5; 5:3=1'66666666; 8:5=1'6...quan prenem més termes de la successió i fem el seu quocient ens apropem al nombre d'or, també conegut com a nombre phi= 1'61803

La proporció àuria es fa servir també en l'art i en l'arquitectura perquè es considera estèticament bella, i es representa d'aquesta manera:

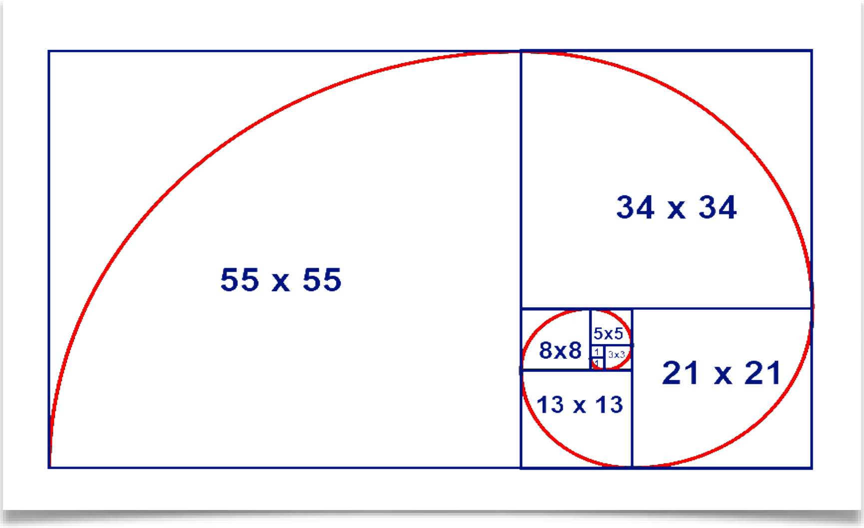



Figura 6: Fibonacci i les proporcions

**Propietats de la successió**

-El quocient entre un terme i l'immediatament anterior a ell varia constantment, però s'estabilitza en el **nombre d'or**. Obtenim el nombre d'or de la següent manera: el nombre d'or és aproximadament 1'618.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \Phi$$

-Qualsevol número natural es pot escriure mitjançant la suma limitada d'alguns termes de la successió de Fibonacci. Cadascun d'ells diferent als altres.

Exemple: 17=13+3+1, 65=55+8+2

-A la successió de Fibonacci tan sols un terme de cada tres és parell, un de cada quatre és múltiple de tres, un de cada cinc és múltiple de 5, etc. Això es pot generalitzar de manera que aquesta successió és periòdica en les congruències de mòdul m per a qualsevol m.

-Cada nombre de Fibonacci és la mitjana del terme que es troba dos llocs abans i el terme que es troba un lloc desprès.

-Els nombres de Fibonacci apareixen en sumar les diagonals del **triangle de Pascal**

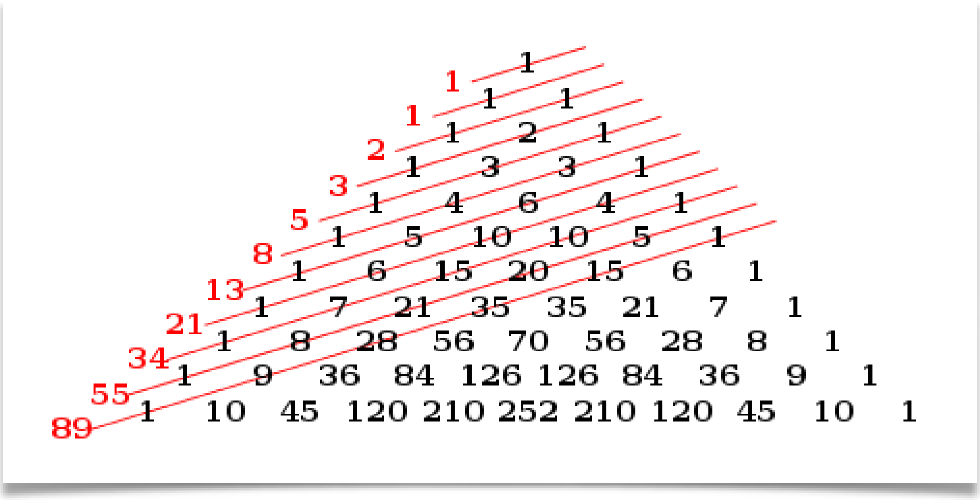



Figura 7: Triangle de Pascal

Una de les relacions que podem establir entre els números de Fibonacci i la música és que el piano està format per 7 octaves ordenades de forma creixent de greus a aguts. Els 6 primers nombres de la Successió de Fibonacci estan en cada octava del piano, que està formada per 13 tecles, on hi ha 8 tecles blanques i 5 tecles negres, que estan agrupades en grups de 2 i 3 tecles.

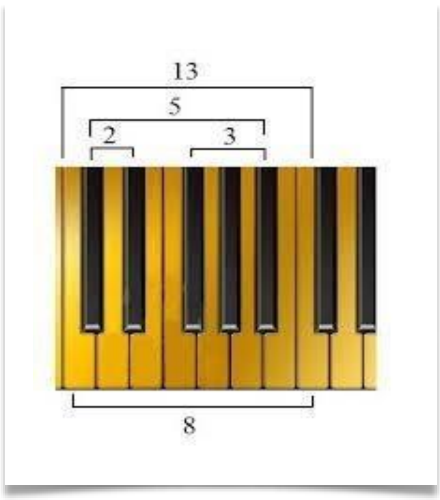



Figura 8: Relació succesió Fibonacci i el piano

Un altre exemple és el del violí i les seves proporcions. Com es pot veure en la imatge:

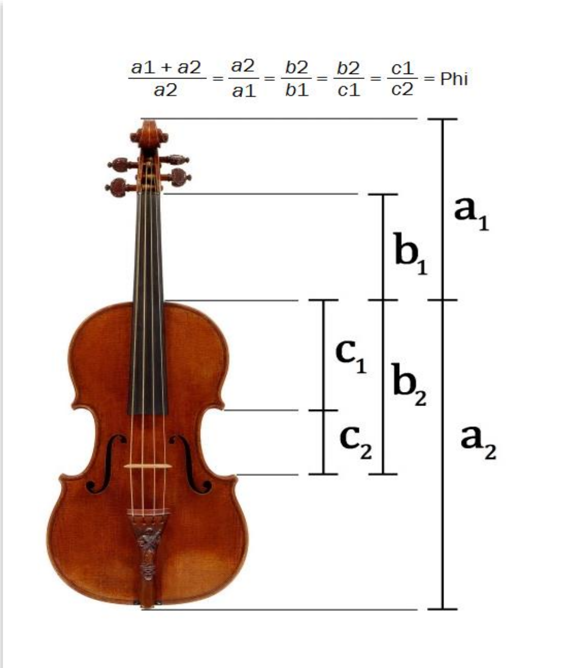



Figura 9: Violí i Fibonacci

Els violins creats pel mestre luthier Antonio Stradivari són famosos per la seva exquisida qualitat tonal i estètica. Els seus violins són molt buscats i són els instruments més valuosos del món de les cordes a causa del seu so inigualable. No obstant això, el que és més sorprenent sobre els seus violins, és que van ser dissenyats i construïts al voltant del nombre d'or. Les proporcions del violí s'ajusten a les ràtios de *Phi*. Fins i tot l'espiral d'un desplaçament de violí revela amb quina precisió els seus instruments reflecteixen la *Relació d'Or*.

Existeixen diversos exemples de composicions musicals que fan servir la successió de Fibonacci:

No sabem si de forma intencionada o intuïtiva, perquè sona bé, Beethoven la fa servir a la 5a simfonia, no només en el tema sinó també en la forma en què inclou aquest tema al llarg de l'obra, separat per un nombre de compassos que pertanyen a la Sèrie Fibonacci. Ja que apareix el motiu principal en els compassos 1, 5, 14, 23... Els intervals de 2m (1), 2M (2), 3m (3), 4J (5) i 6m (8) són molt utilitzats. I per últim el clímax de l'obra es troba al 61'8%.

També Mozart, a la sonata per a piano nº 1, inclou la Sèrie Fibonacci, de forma més o menys intencionada. El segon tema harmònic és més extens que el primer. El primer moviment està subdividit en 38 i 62 compassos i 62/8=1'6316. El segon moviment està subdividit en 28 i 48 compassos i 46/28=1,6429, que són uns números molt propers al nombre *Phi*.

Per altra banda Béla Bartók (1881-1945) fa servir la Sèrie de forma clarament intencionada, perquè va crear l'escala Fibonacci, que va donar lloc a la seva obra *"Música per a instruments de corda percussió i celesta"* (1936), aquest primer va fer l'estructura amb els compassos i va distribuir on havia d'anar cada element.

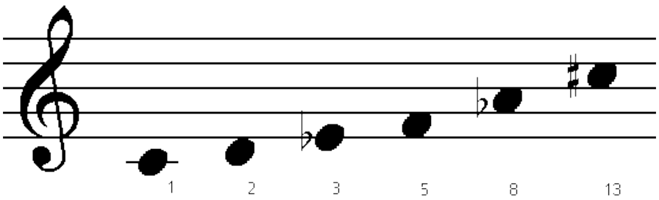



Figura 10: melodia amb la successió de Fibonacci

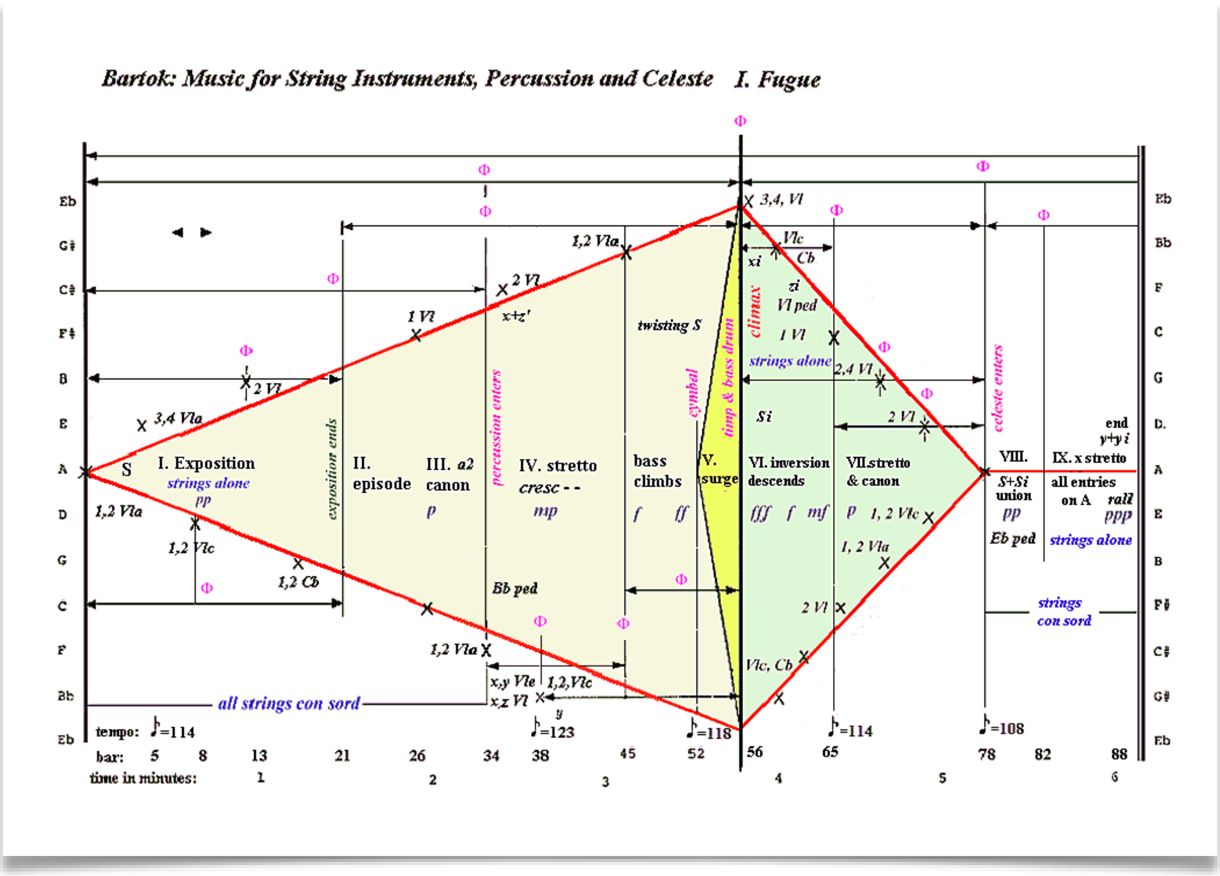



Figura 11: Estructura obra de Béla Bartók

En aquesta figura podem veure l'estructura de l'obra que segueix la successió de Fibonacci.

Analitzant el primer moviment podem veure que; en el compàs 5 apareix la segona veu, en el compàs 8 la tercera veu, en el compàs 13 la quarta veu, en el compàs 21 apareix el primer pedal i el primer episodi, en el compàs 34 hi ha la primera entrada de percussió. [2]

# 3. APROXIMACIÓ AL CONCEPTE DE FRACTAL

## 3.1. QUÈ ÉS UN FRACTAL?

Un fractal és el producte final que sorgeix a partir de la iteració infinita d'un procés geomètric ben definit. És a dir, és una figura geomètrica irregular i fragmentada que es pot subdividir en diverses parts, on cada part resulta ser la mateixa figura a diferent escala.

Moltes estructures matemàtiques són fractals. (Steynberg, 2014).

Benoit Mandelbrot (1924-2010) va inventar la paraula fractal el 1975. Ve de l'adjectiu en llatí *"fractus"* que vol dir trencat o fragmentat. Aquest és un derivat del verb també en llatí *"frangere"* que vol dir trencar. Els fractals no es van inventar al 1975, naturalment, però el concepte sí. Va ser concebut per a descriure formes no euclidianes específiques amb una estructura autosimilar. Molts altres matemàtics havien identificat formes irregulars abans que Mandelbrot proposés el concepte (Koch, Cantor, Peano, Sierpinski, per exemple).

Mandelbrot va situar l'any 1975 com a data frontera per separar l'ús conscient dels fractals en l'art i la música d'una utilització anterior més aviat intuïtiva (Steynberg, 2014)

Dedico el capítol 5 a explicar la musica fractal d'acord amb aquesta subdivisió que el propi Mandelbrot va establir.

[2] L'analisi complet d'aquesta obra que mostra la seva estructura d'acord amb la sèrie Fibonaci es pot trobar a Ibaibarriaga, (2004).

## 3.2. CARACTERÍSTIQUES DELS FRACTALS

Per poder dir que un element és fractal ha de complir un seguit de propietats. (Steynberg, 2014). Com ara:

- **Autosemblança o autosimilitud:** Els subconjunts de la figura són còpies exactes d'aquesta però a escala menor. És a dir, el conjunt està format per diferents parts que presenten la mateixa forma que el tot. [3]
- **Detall infinit o fragmentació en totes les escales:** Independentment de l'escala a què s'observen les estructures, els conjunts que es mostren són molt complexes. És a dir, per molt que l'escala en la qual s'observi s'ampliï, es poden veure els mateixos detalls que a la imatge general.
- **Recursivitat:** Donada una informació inicial s'aplica la regla a una figura per portar a terme la iteració, s'aplica aquesta a una figura i es repeteix el mateix procés fent servir cada cop informació nova fins a l'infinit per arribar a l'autosimilitud. Dit amb altres paraules, els conjunts estan definits per un algoritme recursiu amb processos iteratius infinits.
- **Complexitat:** És l'única propietat present en totes les definicions. Així que és imprescindible perquè un objecte sigui fractal.
- **Dimensió fractal:** Existeixen 5 tipus de dimensions topològiques: la del conjunt buit (-1), la del punt (0), la de la recta (1), la del pla (2) i la de l'espai (3). Abans de l'aparició dels fractals tots els objectes geomètrics tenien una dimensió entera. I en els fractals la dimensió és fraccionària.

Podem calcular aquesta dimensió fractal com una extensió de les dimensions euclidianes convencionals a una dimensió genèrica no entera. Partim d'un objecte unidimensional de longitud 1, si el mesurem amb un instrument de resolució L, obtindrem N(L) parts de l'objecte, verificant-se així: $N(L)\cdot L^1=1$

Si partim d'un objecte bidimensional d'àrea 1 i el mesurem amb u instrument de mesurar àries de resolució L. Llavors: $N(L)\cdot L^2=1$

Agafem per últim, un objecte tridimensional de volum 1 i mesurem-lo amb un instrument de mesura de volums de resolució L. Obtindrem un número N(L) de parts mesurades, per tant:

---

[3] Més endavant analitzo una part de l'estructura de la *Bourée* de la Suite de violoncel nº3 de Bach, com a exemple d'auto-similitud. (veure pg 36)

A partir de l'expressió:

$N(L) \cdot L^D = 1$ calculem el valor de D

$1/L^D = N(L)$

$(1/L)^D = N(L)$

Traiem logaritmes:

$\log(1/L)^D = \log N(L)$

$D \cdot \log(1/L) = \log N(L)$

$D = [\log N(L)]/[\log(1/L)]$

Els fractals matemàtics són perfectes, en canvi, els fractals en la natura no són perfectes, tenen una dimensió fractal determinada.Per tenir una idea del concepte de fractal mostraré diferents objectes de la natura que són de naturalesa fractal.

Figura 12: Falguera

Figura 13: Muntanyes

Figura 14: Núvols

Figura 15: Brocoli

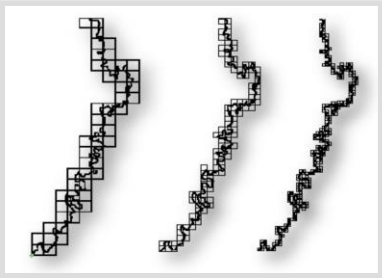


Figura 16: Llera d'un riu

Figura 17: Llamps

Figura 18: Floc de neu

Figura 19: Paó reial

Figura 20: Gotes de pluja

Figura 21: Branques dels arbres

Per acabar de comprendre la idea de fractal explicaré l'efecte Droste, que és una imatge que inclou dins seu una versió més petita de si mateixa, la qual inclou una versió encara més petita de si mateixa, i així successivament.
El 1904 va sorgir a Holanda per un anunci de cacau en pols on hi sortia una infermera sostenint una safata amb una tassa de xocolata calenta i al costat una caixa amb la mateixa imatge. (Smit, 2005)

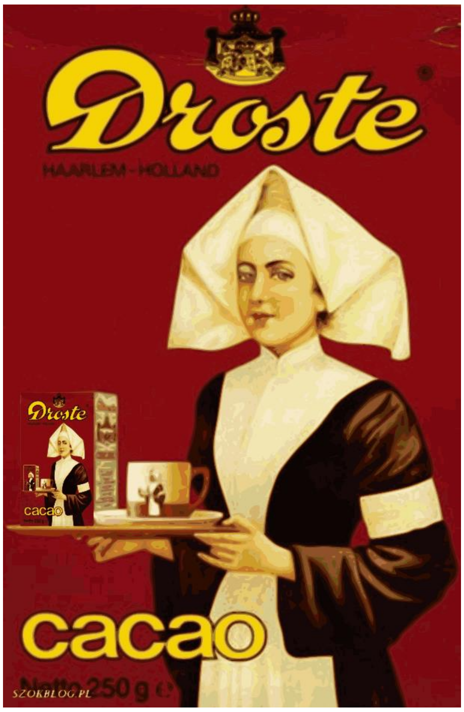



Figura 22: Anunci cacao Droste

## 3.3. EL SOROLL FRACTAL

No només les formes o imatges poden tenir propietats fractals sinó que podem trobar un vincle entre geometria fractal, l'acústica i música, tal i com senyalen Richard Voss i John Clarke.
En les ciències el terme "soroll" es refereix a un soroll involuntari afegit a un senyal inicial. Pot ser escoltat com a soroll acústic quan es converteix en so, o es pot mostrar com a dades aleatòries no desitjades en el processament de senyals. Generalment el soroll es classifica en 3 classes: **blanc**, **marró** i **rosa**. (Voss & Clarke, 1975)

El soroll blanc $1/f^0$ és molt comú en electroacústica. La seva característica principal és que no té memòria: l'amplitud del senyal a cada instant és independent de la dels instants anteriors. La seva densitat espectral és constant i per tant independent de la freqüència ja que és un tipus de soroll pla. És el tipus de soroll que apareix a la sortida d'un micròfon o la "neu" d'un televisor.
El soroll marró $1/f^2$ és aquell en què l'amplitud cau 6 decibels cada cop que la freqüència es duplica, en aquest cas cada instant recorda a l'instant previ.
El soroll rosa 1/f cau d'amplitud 3 decibels per octava a mesura que augmenta la seva freqüència. La seva densitat d'energia per octava és constant, està moderadament correlacionada en el temps i presenta una estructura fractal. D'alguna manera cada instat "recorda" la totalitat de l'anterior i la relació entre el tot i les parts es regeix per autosemblança. Mandelbrot va anomenar salvatge al soroll 1/f perquè sembla que canvia de caràcter constantment.

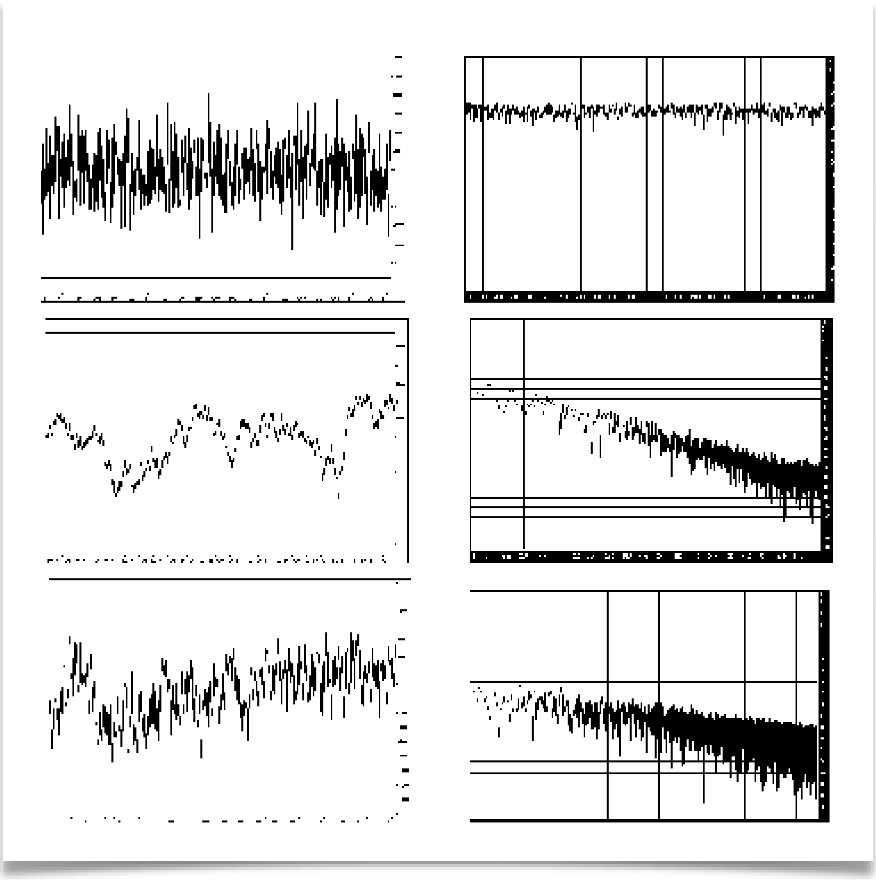


Figura 23: Representació dels sorolls

## 3.4. TIPUS DE FRACTALS

Existeixen dos grups de fractals:

- Fractals lineals: Són els que es construeixen amb un canvi simple en la variació de les seves escales. Per tant seran exactament idèntics en totes les seves escales fins a l'infinit. Generalment són representats amb nombres reals. (triangle de Sierpinski, Corba de Koch).
- Fractals no lineals: Són els que es formen a partir de les distorsions complexes o no lineals. Generalment són representats amb números complexos. (conjunt de Mandelbrot, conjunt de Julia)

## 3.5. EXEMPLES DE FRACTALS

### 3.5.1. CONJUNT DE JULIA

Els conjunts de Julia són uns fractals al pla complex que es basen en qualsevol polinomi de variable complexa. És el conjunt de nombres complexos, que iterats per la funció $f(z)=z^2+c$ tenen l'òrbita acotada. On c és un nombre complex que fa de paràmetre fix i específic per a cada conjunt de Julia. Per tant hi haurà tants conjunts de Julia com nombres complexos. Van des de la circumferència de centre (0,0) i radi 1, per c = 0, fins conjunts realment estranys.

Alguns dels resultats més fascinants produïts per un sistema dinàmic es donen quan iterem una funció amb una variable complexa en lloc d'una real. La dinàmica d'aquestes funcions genera imatges per ordinador d'una gran bellesa i interès matemàtic.

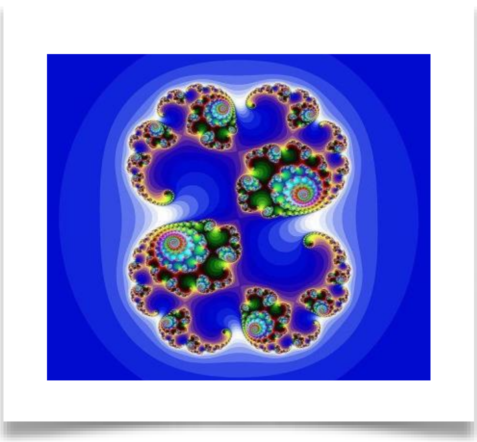


Figura 24: conjunt de Julia

### 3.5.2. CONJUNT DE MANDELBROT

El conjunt de Mandelbrot és un subconjunt del pla que conformen tots els nombres complexos. Per tant, dins del conjunt només hi ha una part de tots els nombres complexos.

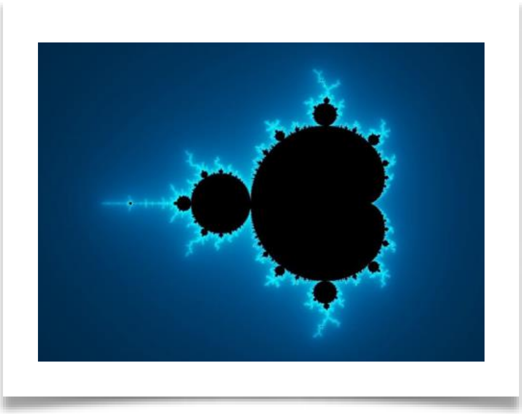


Figura 25: conjunt de Mandelbrot

El conjunt de Mandelbrot és considerat com l'objecte geomètric més complicat creat fins ara per l'home. La frontera que delimita aquest objecte en el pla complex és fractal. No són copies exactament idèntiques però si semblants, mentre que els Conjunts de Julia són autosemblants, el petits Conjunts de Mandelbrot són quasiautosemblants.

Mandelbrot parla sobre la longitud de las línies costaneres en un article titulat "*How long is the coast of Britain*" on va explicar que en figures tan irregulars com podria ser la frontera de Gran Bretanya, com més es redueix l'eina de mesura i per tant la precisió, més gran serà la costa o frontera que vulguem mesurar. Aquesta idea va servir a Mandelbrot per guiar el seu estudi sobre la geometria fractal.

Benoit Mandelbrot va néixer a Varsòvia el 1924, procedia d'una família d'intel·lectuals, van emigrar a França quan Mandelbrot era molt jove, va viure a diversos llocs del país degut a la Segona Guerra Mundial.
Va assistir a diferents universitats, la primera va ser *L'Ëcole Polytechnique*, on va tenir de professor a Paul Lévy. Aquest professor i matemàtic francès va crear l'estructura fractal de la corba de Lévy. Mandelbrot va tenir contacte amb estudis fractals des de ben jove. (Benoît Mandelbrot, Setembre, 2017). https://ca.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot).

També va anar a Princeton, on va tenir de professor a John Von Neumann, considerat un dels matemàtics més importants de la història moderna.
Com ja hem dit anteriorment, Mandelbrot va ser el matemàtic que va desenvolupar la teoria dels fractals.

### 3.5.3. CORBA DE LÉVY

La corba de Lévy és un fractal autosimilar, va ser definida per primera vegada per Ernesto Cesàro el 1906. Ara porta el nom del matemàtic francès Paul Pierre Lévy, el qual va desenvolupar-lo i mostrar les seves propietats geomètriques i autosimilars.

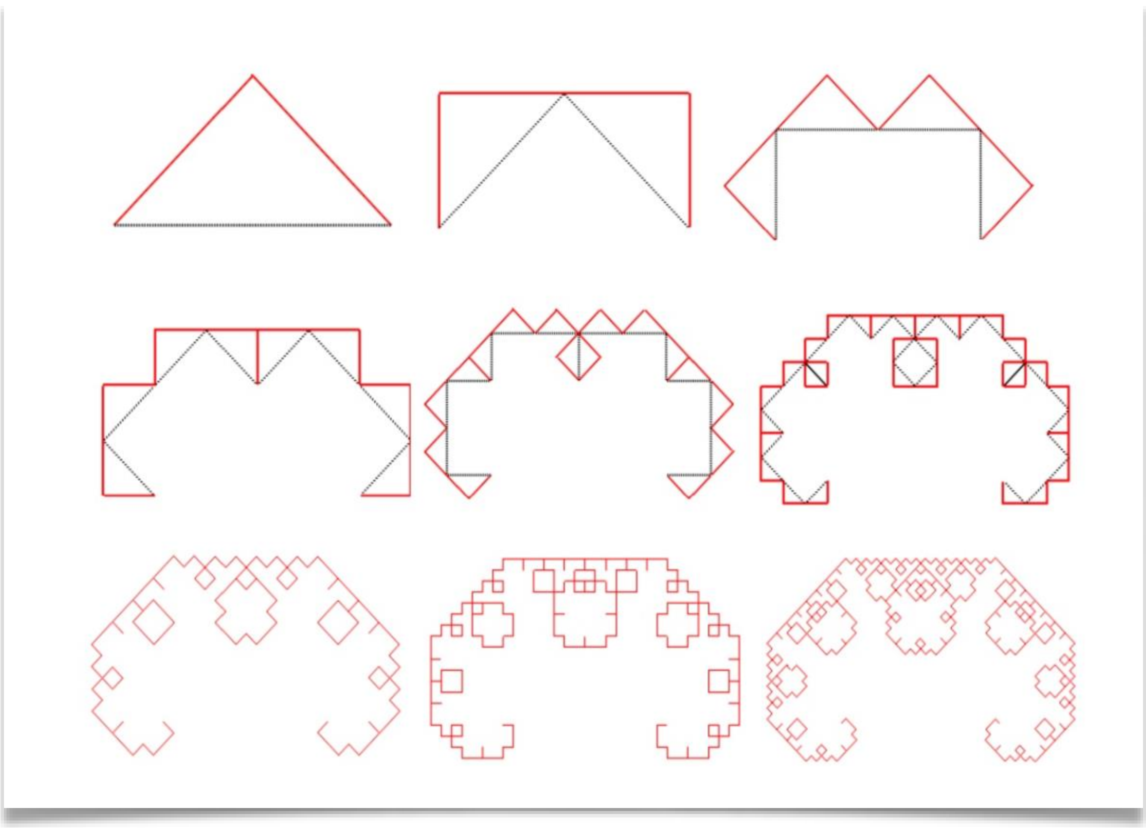


Figura 26: corba de Lévy

### 3.5.4. CONJUNT DE CANTOR

El conjunt de Cantor es forma dividint un segment en 3 parts iguals i suprimint-ne la part central.

La seva dimensió fractal és D=log(2)/log(3)=0'6309


Figura 27: Conjunt de Cantor

Sortiran dos segments de línia més petits, cadascun amb un terç de la longitud del segment de línia original. I així successivament.

### 3.5.5. TRIANGLE DE SIERPINSKI

Per construir el triangle de Sierpinski, agafem un triangle equilàter d'un color, trobem el centre de cada un dels costats i connectem els punts per formar quatre triangles més petits i eliminar el triangle mitjà. I es repeteix el procés de forma contínua.

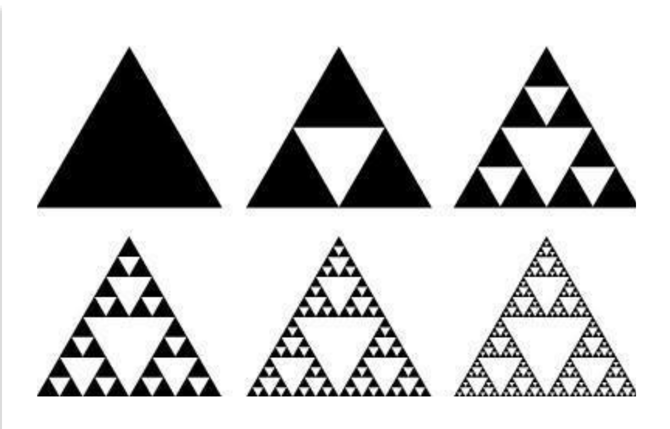


Figura 28: Triangle de Sierpinski

### 3.5.6. FLOC DE NEU DE KOCH

Per construir el floc de neu de Koch es comença amb un triangle equilàter. Cadascun dels seus tres costats es divideix en 3 parts amb la mateixa longitud. El terç mitjà de cada costat se substitueix per un altra triangle equilàter i es retira la base.

Aquest procés es repeteix amb cada segment de línia.

La seva dimensió fractal seria: D=log(4)/log(3)=1'2618

El floc de neu té una propietat única, encara que la seva àrea es pot calcular, la seva longitud és infinita.

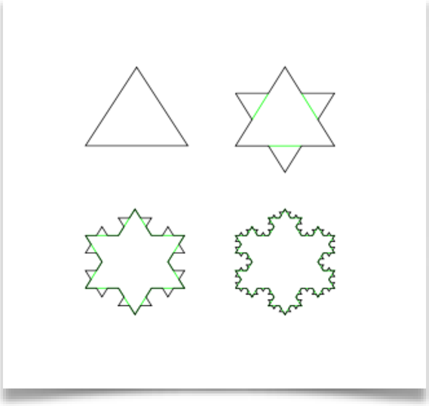


Figura 29: Floc de neu de Koch

### 3.5.7. LA CORBA DEL DRAC

A partir d'un segment, es construeix el triangle rectangle i isòsceles, després s'elimina el segment inicial. El procés de substituir un segment per altres dos a cada línia de la corba i alternant sempre la orientació dels triangles es repeteix diverses vegades.

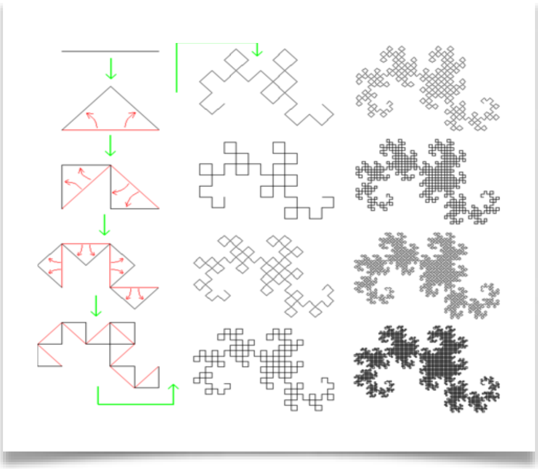


Figura 30: La corba del drac

### 3.5.8. LA CORBA DE PEANO

L'algoritme per la construcció de la corba de Peano és similar a la del floc de neu de Koch, cada segment serà substituït per altres.

A la corba de Peano partim d'un segment de longitud unitat. Deduïm 9 segments nous, cada un de longitud 1/3. Començant amb un interval, aquest se substitueix per una corba poligonal autointersecant formada per 9 segments iguals. Aquests procés es repeteix a cada un dels 9 segments continuant-lo indefinidament. Dimensió fractal és D=log(9)/log(3)=2. La corba de Peano arribarà a omplir tot el pla, per això és dimensió 2.

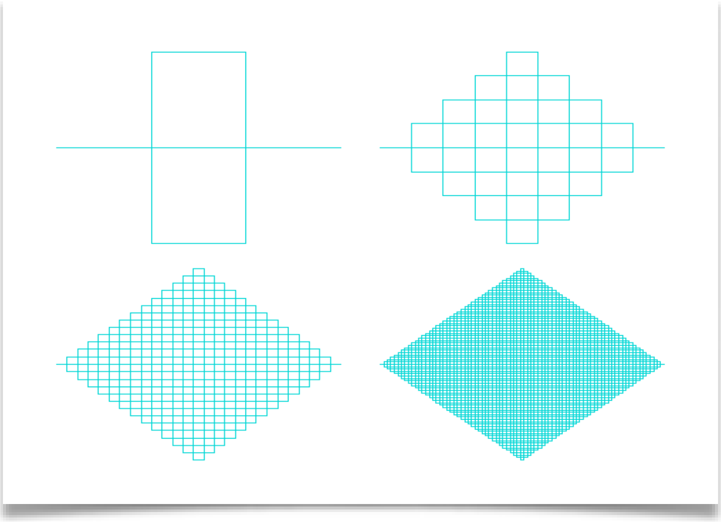


Figura 31: Corba de Peano

### 3.5.9. ESPONJA DE MENGER

S'obté a partir d'un cub subdividit en 27 cubs més petits, els costats dels quals tenen una longitud igual a 1/3 de la del costat del cub original.

Successivament es van eliminant els cubs centrals de cada cara i el cub central, en total 7, així quedaran 20 cubs sòlids, tots del cub original.

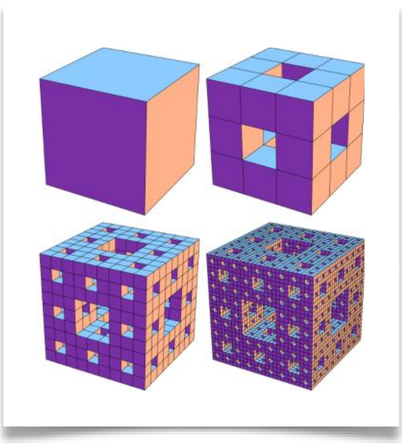


Figura 32: Esponja de Menger

# 4. GEOMETRIA, MÚSICA I FRACTALS

Havent explicat el concepte de fractal i els diversos tipus, passem ara a buscar la seva relació amb la música.

Hi ha característiques de la geometria que fan possible l'existència dels fractals i que podem també aplicar en la música. Explicaré alguns exemples.

## 4.1. CARACTERÍSTIQUES GEOMÈTRIQUES EN LA MÚSICA

En el següent apartat explicarem la relació que es pot establir entre algunes propietats matemàtiques i les mateixes propietats en la música. (Steynberg, 2014)

- **Transposició i traducció:**

El que en geometria es diu transposició, en música es diu traducció. Es produeix quan totes les coordenades o punts d'un objecte es mouen per una distància fixa en la mateixa direcció, cap amunt, avall o cap als costats.

Veiem un exemple de transposició geomètrica.

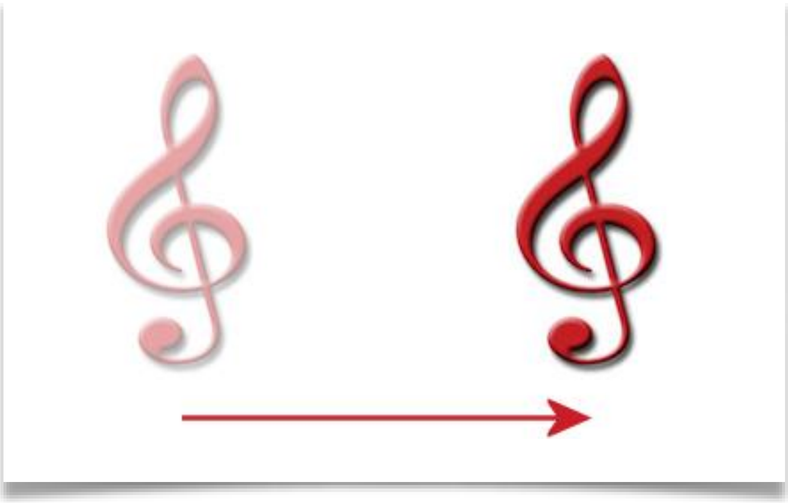


Figura 33: Transport i traducció

En música, la traducció pot consistir en que els motius o temes més curts es poden transportar per crear seqüències.

Podem observar això en el 1r moviment de la *Sonata no16 en Do Major k545* de Mozart:


Figura 34: 1r moviment de la *Sonata no16 en Do Major k545* de Mozart

https://www.youtube.com/watch?v=0WQjLCXFm7A

- **Escalat:**

En matemàtiques és conegut com a dilatació, i significa ampliar o reduir la mida d'un objecte, mentre que les seves dimensions segueixen sent les mateixes.

Figura 35: Escalat

L'equivalent musical de l'escalat és augmentant o disminuint els valors de les notes.


Figura 36: *Songe d'une Nuit du Sabbat*- Berlioz

https://www.youtube.com/watch?v=0WQjLCXFm7A

- **Reflexió:**

La inversió melòdica i retrògrada són el mateix que la reflexió d'un objecte al voltant de l'eix x i l'eix y respectivament.

En aquest fragment de la *Invenció nº14 en si b major* de Bach, es mostra la melodia de la mà dreta, on es pot veure un tema, i la inversió melòdica d'aquest tema.

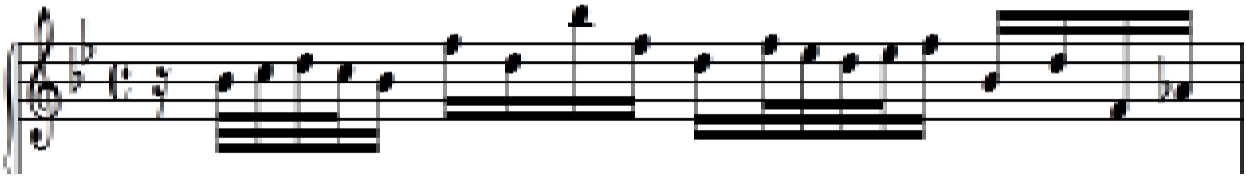


Figura 37: *Invenció nº14 en si b Major* de Bach

https://www.youtube.com/watch?v=sRL4Qa8WAkI

En geometria, la inversió pot ser obtinguda amb el reflex horitzontal o la reflexió al voltant de l'eix x. També a través de la reflexió al voltant de l'eix y o un reflex vertical.

Figura 38: Reflexió a l'eix y

En la imatge que hi ha a continuació podem veure els primers 20 compassos del Minuet i trio de la Sonata de *Haydn*, *Hob XVI nº26*, que és un exemple de reflexió vertical. Perque tant si ho llegim de principi a final com a l'invers, sona la mateixa melodia.

Minuet de la Sonata de *Haydn*, *Hob XVI nº26*

https://www.youtube.com/watch?v=aq5jmIW96iY

Trio de la Sonata de *Haydn*, *Hob XVI nº26*

https://www.youtube.com/watch?v=EixllYauriE


Figura 39: Minuet i trio de la Sonata de Haydn, Hob XVI nº26

- **Rotació o inversió retrògrada:**

La inversió retrògrada és similar a girar un objecte al voltant d'un punt fix. Això en matemàtiques és conegut com a rotació.

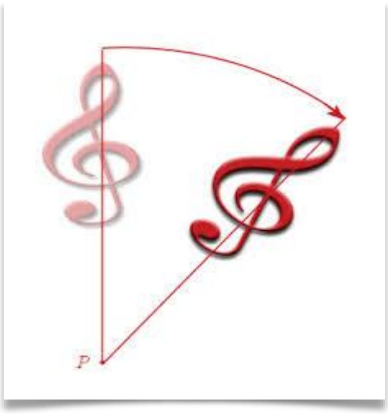


Figura 40: Rotació o inversió retrògrada

En música, la inversió retrògrada es produeix quan un motiu o tema es repeteix tant en un mirall horitzontal com vertical.

Un exemple seria el *Ludus Tonalis* de Paul Hindemith. que és un recull de 25 estudis, on l'últim estudi anomenat *Postuludium* és un clar exemple d'inversió retrògrada del primer, anomenat *Praeludium,* excepte per l'acord de Do major afegit a l'últim compàs de la composició.

## Primera peça del Ludus Tonalis

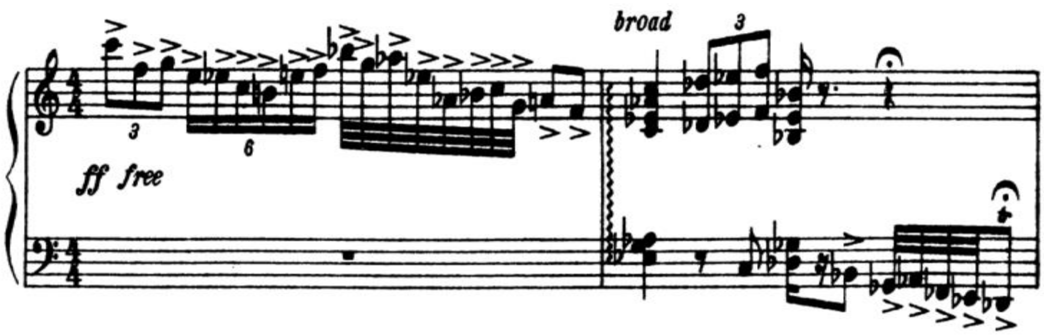



Figura 41: *Ludus Tonalis- Praeludium*

https://www.youtube.com/watch?v=D7fRq9CgMMA

### Última peça del Ludus Tonalis

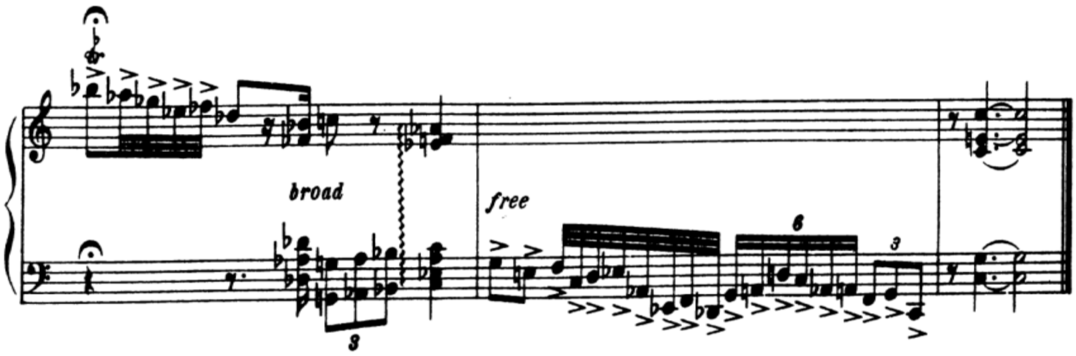



Figura 42: *Ludus Tonalis- Postludium*

https://www.youtube.com/watch?v=JyXFO90zCMk

Si dues o més de les transformacions anomenades anteriorment són combinades simultàniament, són anomenades *cisallament matemàtic.* Trobem un exemple en el *Contrapunctus VII de Die Kunst der Fuge* de Bach. Del compàs 1 al 4 podem veure l'ús simultani de dues de les transformacions que hem comentat, és a dir, inversió i augment. Es pot observar a la *figura 45*, explicada i analitzada més endavant.

El tema principal està repetit en la veu més alta a la inversió melòdica on el valor de les notes està doblat.

## 4.2. FRACTALS EN LA MÚSICA ABANS DE MANDELBROT

Abans de Mandelbrot, la pintura, la música i altres disciplines artístiques presentaven característiques fractals, però potser no de forma conscient perquè els fractals conceptualment no existien. Simplement ho feien d'aquesta manera, potser, perquè era bonic a la vista o sonava bé.

Si aquesta afirmació és certa, podriem dir que la música anterior a Mandelbrot, per tant, no és estrictament fractal, perquè no ho pretenia, sinó que té algunes de les

característiques atribuïbles als fractals, però de les peces estudiades no n'hi ha cap que les compleixi totes, per tant no podem dir que són estrictament fractals.
En la figura 43 podem veure un dels casos on apareix l'augment i la disminució, característiques dels fractals de què hem parlat ateriorment.

Un dels autors que utilitza freqüentement alteracions rítmiques, motius o temes és J.S. Bach (1685-1750) utilitza freqüentment alteracions rítmiques de motius o temes.

La figura 43 ens mostra els primers 5 compassos del *Contrapunctus VI* de *Die Kunst der Fuge* de Bach. La veu soprano entra al compàs 2 però en inversió i disminució melòdica. Al compàs 3, el contralt entra també en disminució.
Aquesta peça ens mostra el mateix tema en entrades escalonades.


Figura 43: *Contrapunctus VI de Die Kunst der Fuge* de Bach

La figura 44, és el *Contrapunctus VII*. Aquesta peça ens mostra l'ús simultani de dues transformacions, la inversió melòdica i l'augment rítmic. Per tant això també seria un exemple de cisallament matemàtic.
Al compàs 3 la veu contralt entra amb el tema invertit però amb els mateixos valors de les notes del tema original que és el tenor. A continuació analitzo aquesta peça.

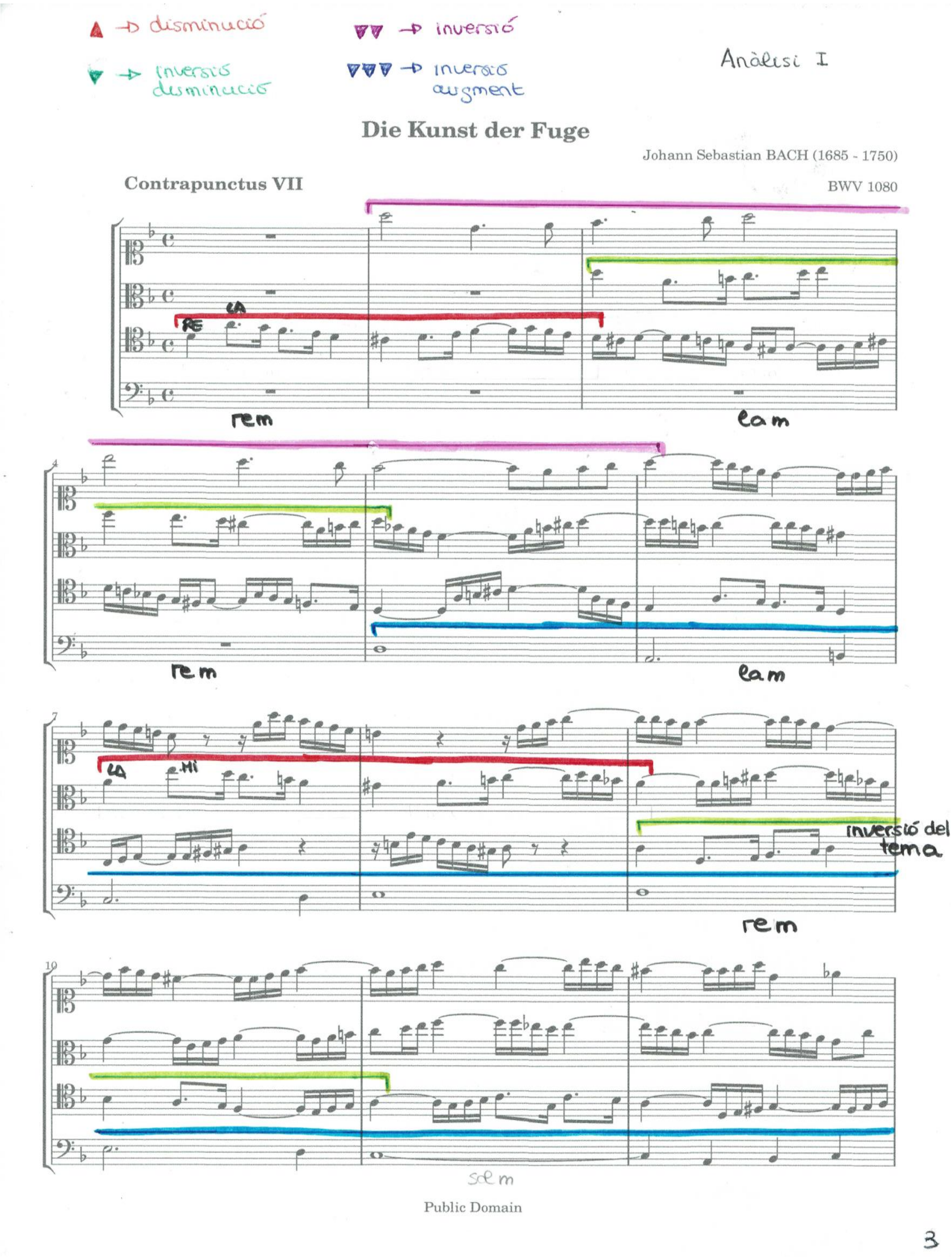



Figura 44: *Contrapunctus VII de Die Kunst der Fuge* de Bach

Un altre exemple és la *Bourée I* de la Suite de violoncel nº3 de *Bach,* BWV 1009, on podem veure un exemple escalat estructural auto-similar (Figura 45).

Es pot veure clarament una estructura A, A' i B en quatre escales diferents, on A és curta i B és el doble de temps. Cada secció A té la seva pròpia estructura AA'B a menor escala. Això és l'escalat estructural, i també una forma d'auto-similitud.


Figura 45: *Bourée I* de la Suite de violoncel nº3 de Bach, BWV 1009

https://www.youtube.com/watch?v=-gNu3qyOe0k

Podem comparar aquesta mateixa peça amb l'estructura d'un tipus de fractal, el conjunt de Cantor, explicat a la pàgina 24.

El motiu inicial consta de dues corxeres i una negra, que durarien 1,1,2. A la primera semi-frase aquest motiu es repeteix dues vegades (A,A') i varia una tercera part (B) que dura el doble. A aquesta semi-frase li contesta una altra igual de llarga (s1,s1) i les dues conclouen amb una espècie de coda (s2) que dura el doble de les semi-frases. El patró es torna a repetir a la macroestructura, tot i que variï una mica.

## 4.3. FRACTALS EN LA MÚSICA DESPRÉS DE MANDELBROT

Un cop Mandelbrot va establir el terme "fractal", diversos artistes, en l'art, la música, etc. van fer expressament les seves obres/composicions, seguint l'estructura fractal, amb totes les seves propietats.

Molt recentment s'han fet programes per fer música fractal, seguint uns algoritmes i unes fórmules, però aquesta música és electrònica, i no és objecte d'aquest treball.

Al 1975, Mandelbrot va afirmar que els fractals són formes generades per processos matemàtics repetitius i caracteritzats per no ser diferenciables.

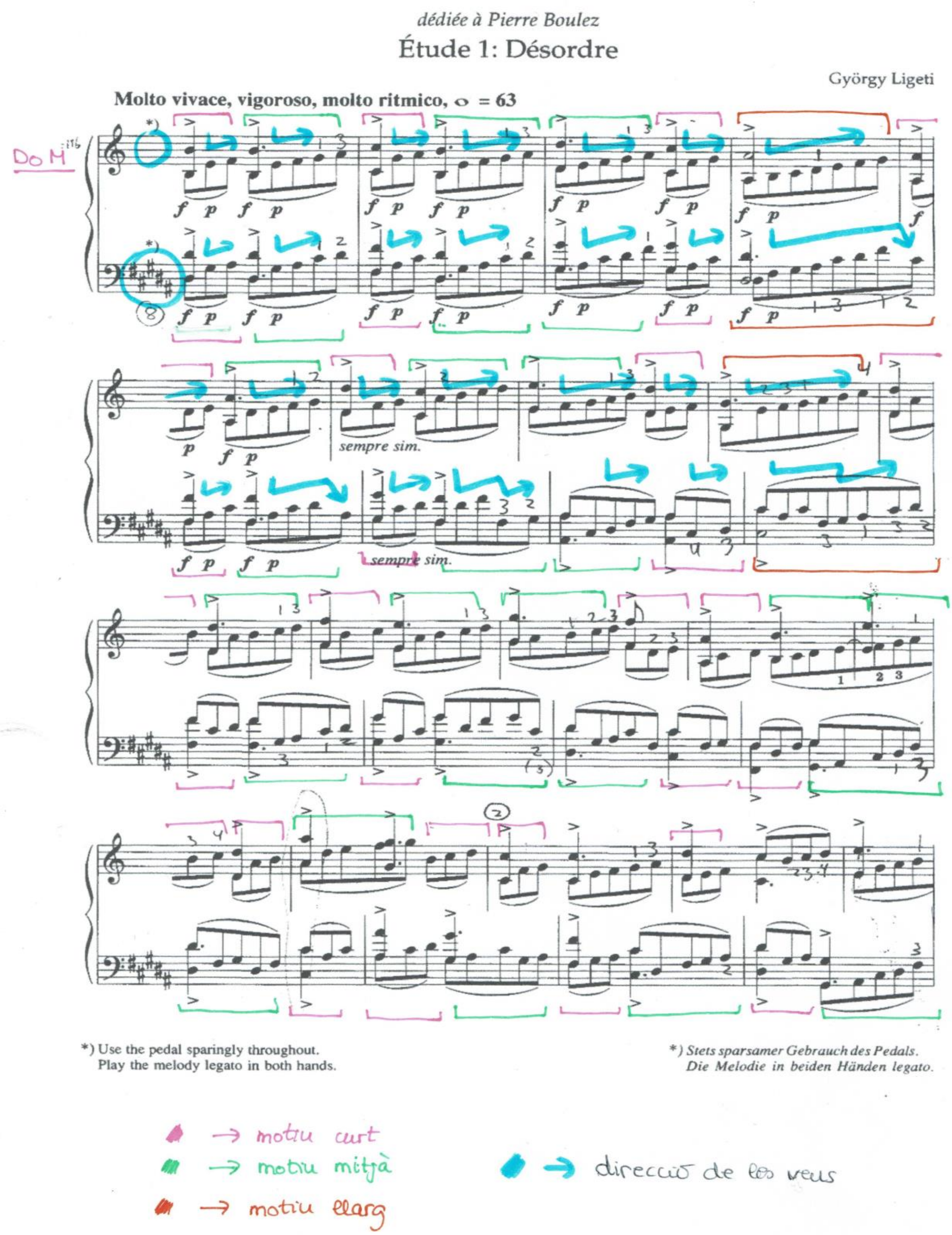
El 1982, però, Mandelbrot no molt convençut amb aquesta definició, va determinar un fractal com a un conjunt la dimensió de la qual és estrictament major que la seva dimensió topològica. Ell mateix va reconèixer que aquesta última caracterització no era suficientment general i excloïa alguns objectes matemàtics que realment són fractals.

A partir de Mandelbrot, podriem establir dues branques en la música fractal contemporània: una seria la música composta de forma "tradicional" però amb característiques expressament fractals; la segona, seria la música fractal digitalitzada, creada amb programes que seguint determinats algoritmes componen música fractal. Com a "representant" de la primera tendència parlaré breument, de György Ligeti. Pel que fa a la segona, es pot fer esment del músic i arquitecte Iannis Xenakis.

**György Ligeti (1923-2006)**, compositor d'origen romanès, a partir de 1980 va començar a investigar el treball de Mandelbrot sobre els fractals, i al 1986 el va poder conèixer Mandelbrot en persona.

El primer estudi per piano de Ligeti és el *Désordre* (1985), on utilitza idees d'autosimilitud i geometria fractal. La mà dreta només toca les tecles blanques i l'esquerra només toca les negres. La combinació d'ambdues formen la il·lusió d'una tercera tonalitat i d'un efecte caòtic.

Figura 46: Estudi nº1 Ligeti- *Désordre*



A *Désordre* l'estructura de la mà dreta i esquerra són diferents, ja que la mà dreta fa 14 iteracions amb el mateix patró melòdic, cada patró està dividit en 3 frases de 4, 5 i 6 compassos cadascuna.

La mà esquerra té un patró melòdic més llarg que el de la dreta, format per 4 frases de 4, 5 i 6 compassos cadascuna.

La mà dreta està en Do Major, mentre que l'armadura de la mà l'esquerra té 5 sostinguts. El moviment continu de les 8 notes en cada compàs és persistent.

Les característiques fractals de *Désordre* s'assemblen a la construcció del Floc de neu de Koch. Tal com diu Ilse Steynberg ( 2014).

Una altra peça fractal de Ligeti és l'estudi nº13, s'anomena *L'escalier du diable* (l'escala del diable) (1993).

L'estudi està relacionat amb l'autosimilitud i la funció de Cantor. A la funció de Cantor se la denomina “Escala del diable” perquè té infinit nombre de graons.

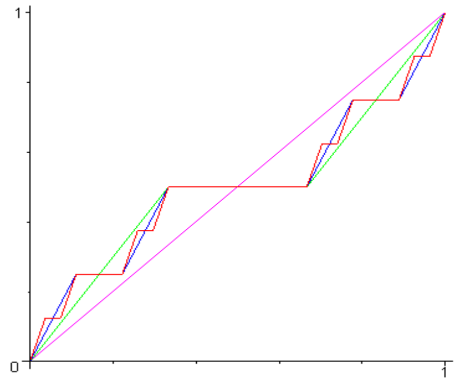



Figura 47: funció de Cantor

Segons Ligeti, el seu estudi no va ser directament inspirat en fractals, però al 1993, quan Ligeti estava ocupat amb la composició dels seus estudis, estava vivint a Santa Monica, California. Durant aquell temps, la costa va ser colpejada pel sistema climàtic "*El niño"*.

Ligeti afirma que aquesta obra no està inspirada en fractals, sinó en una experiència personal seva: Un dia, Ligeti havia de tornar cap al seu hotel en bicicleta, i havia de pedalejar en contra del vent, i va ser en aquesta experiència que se li van acudir les primeres idees per *L'escalier du diable.* Després de tots aquests successos desastrosos va decidir posar la peça la número 13, ja que és el número de la mala sort.

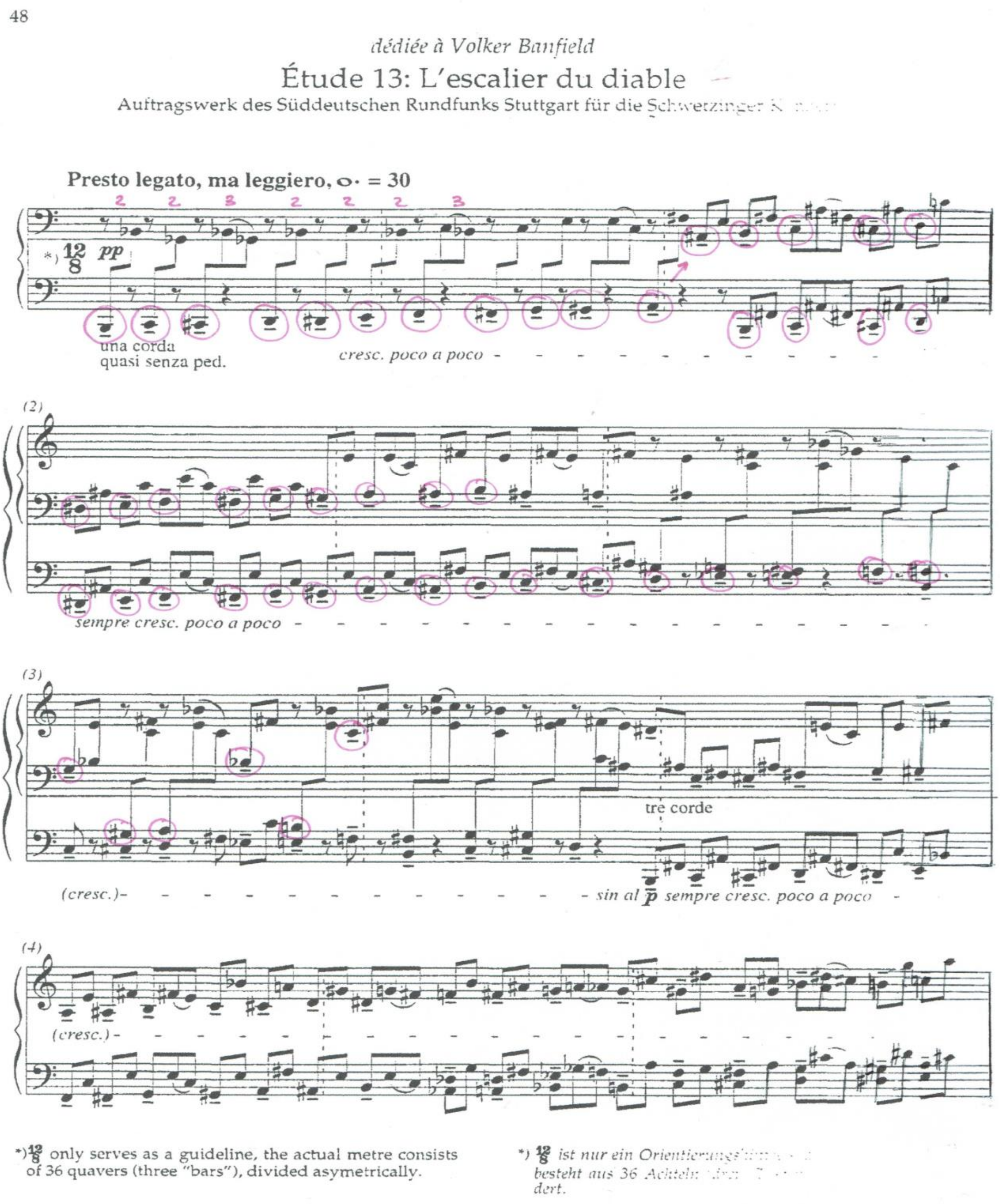



Figura 48: Ligeti, Escala del Diable

Stanley Kubrick al 1969 va dirigir la pel·lícula *Odisea en el espacio* (2001) i va escollir 3 obres de György Ligeti per aquesta pel·lícula: *Requiem* (1963), *Atmosphères* (1961) i *Lux aeterna* (1966).
Les obres de Ligeti trenquen les estructures dodecafòniques. Utilitza la **micropolifonia,** una tècnica de composició creada per ell on entrellaça diferents veus de manera molt complexa. A més, l'orquestra es divideix en subconjunts que progressen individualment i per separat, donant lloc a un tot compacte.

**Iannis Xenakis (1921-2001)** va ser pioner de l'ús dels ordinadors en la composició musical algorítmica. A més de músic, era arquitecte i per tant amb importants coneixements matemàtics.
Una de les obres de Xenakis, *Evryali* (1973) la va compondre amb ajut del Sistema UPIC, un sistema informàtic inventat per ell. Consisteix en una tableta gràfica en què el compositor dibuixa els sons, les seves durades i altres paràmetres. El sistema transforma aquesta informació en so. Avui en dia tothom pot fer coses semblants a aquesta amb els seus ordinadors o consoles, però a començaments dels anys 70 va ser tota una novetat. Aquesta obra està composta de tal manera que no és possible interpretar-la sense ordinadors i sintetitzadors.
Com he dit abans, actualment hi ha diversos programes (Pérez, J. A. 2000) que creen música fractal, com ara: MusiNum, The Well Tempered Fractal, LMuse, Gingerbread… Tot això, però, seria objecte d'un altre treball.

## 5. CONCLUSIÓ

L’objectiu final d’aquest treball era comprendre el concepte de fractal, especialment en la seva relació amb la música.
La relació entre el llenguatge matemàtic i la música és evident des dels inicis de tots dos llenguatges, però també he après a comprendre una nova relació entre les matemàtiques, el món en general i la música en particular.
En efecte, el concepte de fractal fa entendre que la realitat té estructura matemàtica. Les matemàtiques no són idees abstractes i separades de la realitat, sinó que ens poden servir per explicar la realitat mateixa. Això, aplicat a la música, ens porta a entendre que hi ha una part emocional en ella, que és allò que cadascú sent en escoltar una obra. Però, per una altra banda, hi ha una part a la música que és proporció, mesura i, amb els fractals, algoritme. Això connecta les matemàtiques, com a representació màxima de la racionalitat, amb allò que sembla més distant d’elles: les emocions. La música és totes dues coses.

Per arribar fins aqui, he passat mesos de recerca, tant teòrica com d’aplicació pràctica. He analitzat peces que ja havia tocat, però reconeixent-les des d’un altre punt de vista. Jo no sabia, quan la vaig tocar, per exemple, que la *Invenció num 14 de Bach BWV 785* té característiques fractals. I la música és emoció, però també comprensió.
He volgut complementar tot això amb la meva part pràctica, que ha estat costosa de realitzar, però penso que els codis QR amb l’enllaç als fragments que jo mateixa toco era la millor forma de mostrar allò que anava explicant a la part teòrica.

Per tant, arribats aqui, puc concloure després de tants mesos de treball que la relació entre la música i les matemàtiques és fins i tot més estreta del que em pensava. I que he assolit els meus objectius de treball.

De tota manera, permeteu-me dir, per acabar, que de vegades l’únic que hem de fer amb la música és deixar-nos portar i sentir-la.

## 6. BIBLIOGRAFIA I ALTRES RECURSOS


- Arbonés J. i Milrud P. (2016) La armonía es numérica. Música y matemáticas. National Geographic.
- Barrallo J. (1993) Geometría fractal- Algorítmica y representación.
- Bartók B. (sd.) Musik für Saiteninstrumente, Schlagzeug and Celesta. Philharmonia- partituren.
- Florido, R. (2012). Jugant amb el caos i la natura. Premis de Recerca Jove.
- Ibaibarriaga, I. (2004). Música y matemáticas. De Schoenberd a Xenakis. *Un paseo por la Geometría*, 1–22.
- Pérez, J. A: (2000): Música fractal. El sonido del caos. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos.Universidad de Alicante
- Pous, N. (2003). Bach i el sistema pitagòric. M/M Matemàtiques.
- Sansó A (2008). A “Donem la Nota”. Escola i Conservatori de música de Reus.
- Smit, B. De. (2005). The Droste-effect and the exponential transform, 2005, 169–178.
- Steynberg, I. (2014). The applications of fractal geometry and self-similarity to art music. Universityt of Pretoria.
- Voss, R. F., & Clarke, J. (1975). 1/F Noise in Music and Speech. Nature.


## RECURSOS TIC

Canal Youtube:

https://www.youtube.com/channel/UCMj0VTqUZzvQrVQq_C4U49Q

Fractalitzador d’imatges: **FRACTALIZER By William Rood**

https://itunes.apple.com/es/app/fractalizer/id953836458?mt=8

Generadors codis **QR: GENERATOR, Tapmedia**

https://itunes.apple.com/us/app/qr-code-generator-free/id1065047998?mt=8

Lector codis QR: **CRAFTER, by Kerem Erkan**

https://itunes.apple.com/us/app/qrafter/id416098700?mt=8

Gestor de Bibliografia: **MENDELEY, Mendeley Ltd.**

https://www.mendeley.com/

Escurçador o opimitzador d’adreces web: **Bit.ly URL Shortener and Link Management Platform.** https://bit.ly/

## WEBGRAFIA

http://bit.ly/2lNag0c 3-2-18

http://bit.ly/2CA1XPG 3-2-18

http://bit.ly/2qhEBsC 3-2-18

http://bit.ly/2EDLK9G 3-2-18

http://bit.ly/2AeoXOv 3-2-18

http://bit.ly/2CwJnbp 3-2-18

https://ibm.co/2ixpYOJ 3-2-18

http://bit.ly/2qevNnf 3-2-18

http://bit.ly/2lOZre4 3-2-18

http://bit.ly/2CzNGTt 3-2-18

## IMATGES

Figura 1: monocordi http://bit.ly/2EDSeoU 10-8-17

Figura 2: Valors de les notes musicals i els seus silencis http://bit.ly/2CrNipJ 2-12-17

Figures 3: Intervals http://bit.ly/2lIvn2S 12-8-17

Figura 4: Harmònics http://bit.ly/2DPSlwD 12-8-17

Figura 5: Cercle de quintes http://bit.ly/2EEJ8bG, 2-1-18

Figura 6 i 7: Fibonacci i triangle Pascal http://bit.ly/2EDLK9G 2-1-18

Figura 8: Fibonacci i piano http://bit.ly/2q8XfTk 2-1-18

Figura 9: Violí i Fibonacci http://bit.ly/2CCk58p 2-1-18

Figura 10: Melodia amb la successió de Fibonacci http://bit.ly/2CcLP2y 2-1-18

Figura 11: Estructura obra Béla Bartók http://bit.ly/2lG6s0K 2-1-18

Figura 12: Falguera fractal http://bit.ly/2EBKkfM 2-1-18

Figura 13: Muntanyes fractals http://bit.ly/2CbzXxO 2-1-18

Figura 14: Núvols http://bit.ly/2CbzXxO 2-1-18

Figura 15: Romanesco fractal http://bit.ly/2CGHx4H 2-1-18

Figura 16: Fragment fractal riu Mississipi http://bit.ly/2A8qBAZ

Figura 17: Llamps fractals http://bit.ly/2ECxsWJ 2-1-18

Figura 18: Floc de neu fractal https://istockpho.to/2CwOM18 2-1-18

Figura 19: Paó reial cua fractal http://bit.ly/2lHLqif 2-1-18

Figura 20: Gotes pluja fractals http://bit.ly/2CGmEXc 2-1-18

Figura 21: Branques arbres fractals http://bit.ly/2CbwiA7 2-1-18

Figura 22: Anunci cacao Droste http://bit.ly/2lIQT7J 2-1-18

Figura 23: Sorolls blanc, marró i rosa http://bit.ly/2DR6DNtsorolls 2-1-18

Figura 24: Conjunt de Júlia http://bit.ly/2ECEfzH 2-1-18

Figura 25: Conjunt de Mandelbrot, http://bit.ly/2lEaIOw 2-1-18

Figura 26: Corba de Levy http://bit.ly/2CvoyNp 5-9-17

Figura 27: Conjunt de Cantor, 5-9-17 http://bit.ly/2CwQ4te

Figura 28: Triangle de Sierpinski http://bit.ly/2CCCx0F 2-2-18

Figura 29: Floc de neu de Koch http://bit.ly/2qaFVgN 2-2-18

Figura 30: La corba del drac, http://bit.ly/2Ctsw8p 2-2-18

Figura 31: Corba de Peano http://bit.ly/2DSLqmv 2-2-18

Figura 32: Esponja de Menger http://bit.ly/2CurTMQ 2-2-18

Figura 33-43: Steynberg, Ilse: The applications of fractal geometry and self-similarity (2014)

Figures 44-46: Partitures http://bit.ly/2lFfz1O 10-8-17

Figura 47: Funció de Cantor: http://bit.ly/2DQbZbC 2-2-18

Figura 48: L'escala del Diable http://bit.ly/2lFfz1O , 20-11-17