



Musik für Saiteninstrumente, Schlagzeug und Celesta (in 4 Sätzen)

1

Musique pour instruments à cordes, percussion et célesta (en 4 parties)

Aufführungsrecht vorbehalten
Droits d'exécution réservés

I.

Béla Bartók

Andante tranquillo, ♩ ca. 115-112

1.2. Violo *con sord.* *pp* **5**

3.4. Vl. *con sord.* *pp*

1.2. Vcl. *pp*

3.4. Vl. *pp*

1.2. Vcl. *pp*

INS JOAN
PUIG I
FERRETER

LA PROPORCIÓ ÀURIA I LA MÚSICA

ESTUDI DE LA RELACIÓ ENTRE LA MÚSICA I LA PROPORCIÓ

2. Vl.

3.4. Vl.

1.2. Vcl.

1.2. Vcl.

1.6180339887498948482045...

2. Vl.

3.4. Vl.

1.2. Vcl.

1.2. Vcl.

15

Miguel MANSERGAS COLLADO

Tutora: Adelaida IBÁÑEZ FERRATER

Gener del 2013

“Al darrere de les parets juguen els déus; juguen amb nombres, dels quals és fet l’ univers.”

Le Corbussier

“La música és un exercici aritmètic secret i la persona que s’ entrega a ella no se n’ adona de que està manipulant números.”

W. Leibnitz

ÍNDEX

INTRODUCCIÓ

1. Objectius.....	5
2. Metodologia.....	6

1^a PART. PRESENTACIÓ DE LA PROPORCIÓ ÀURIA

1. Demostració matemàtica.....	7
1.1. Definició del nombre d' or.....	7
1.2. Successió de Fibonacci.....	9
1.3. Relacions numèriques sorprenents.....	12
1.4. La forma dels rectangles i el nombre d' or.....	16
1.5. Construcció de un rectangle auri.....	18
1.6. Propietats del rectangle auri.....	19
1.7. Les espirals i el número d' or.....	21
1.8. El número d' or i el pentàgon.....	23
2. Aplicacions de la proporció àuria en l' art.....	27
2.1. Bellesa i perfecció en l' art.....	27
2.1.1. La divina proporció de Luca Pacioli.....	28
2.1.2. Leonardo: la perfecció àuria.....	30
2.2. El número d' or en la pintura.....	34
2.3. La proporció àuria en l' arquitectura.....	42
2.4. La proporció àuria en el disseny.....	48
3. El número auri i la naturalesa.....	51
3.1. Créixer conservant la forma.....	51
3.2. La proporció àuria en els éssers vius.....	52

2ª PART. LA PROPORCIÓ ÀURIA EN LA MÚSICA

1. Obres representatives.....	72
1.1. Johann Sebastian Bach.....	72
1.2. Béla Bartók.....	74

3ª PART. APLICACIONS DELS PRINCIPIS A LA CREACIÓ

1. Seguiment.....	77
2. Autoanàlisi i característiques generals.....	80
CONCLUSIONS.....	80
AGRAÏMENTS.....	81
BIBLIOGRAFIA.....	81
WEBGRAFIA.....	82
ANNEXOS.....	83

INTRODUCCIÓ

De ben segur que tots hem sentit a parlar de l' *Home de Vitruvio*, la *Gioconda* i del Partenó d' Atenes, fins i tot, alguns també sabem que hi ha quelcom màgic o especial en aquestes obres. D' altra banda són pocs els que s' han preguntat quina relació tenen aquestes obres amb la proporció àuria, una xifra gairebé desconeguda per la majoria de la gent. Aquesta proporció va ser inicialment utilitzada pels egipcis, els grecs i posteriorment represa en la cultura occidental com a mesura d' estètica.

No només va ser utilitzada per Leonardo Da Vinci, altres pintors, escultors i arquitectes tenen obres i estudis relacionats amb la proporció. A més a més, la proporció àuria queda reflectida en la naturalesa, un fet sorprenent i increïble... Per contra, en l' àmbit musical, trobem que hi ha poca informació relacionada amb la proporció, comparada amb la quantitat que trobem en altres arts com la pintura o l' arquitectura.

En la música, la proporció àuria no té la importància que té en altres arts, ja que la seva aplicació és més complexa i passa més desapercebuda per l' oient, per això, molts analistes dubten entre una simple coincidència o un gran treball. Tot i això, compositors destacats com J.S. Bach i Béla Bartók, tenen obres on sembla que utilitzin aquesta misteriosa proporció. Per tant, sembla que la proporció àuria al llarg del temps ha revolucionat la història de les arts i ha deixat un buit dubtós en la música, el qual vull descobrir.

1. OBJECTIUS

El nombre d' or i tot allò referent a la proporció àuria configura un món molt extens, amb molta informació relacionada amb les matemàtiques, les arts i la naturalesa. Podríem omplir moltes pàgines d' informació sobre la proporció i les seves aplicacions... és per aquest motiu que he intentat acotar la recerca per tal d' evitar un excés d' informació, introduint el més important per desenvolupar el treball de recerca i el més sorprenent.

L' objectiu d' aquest treball és analitzar i estudiar la música relacionada amb la proporció àuria. Ho porto a terme fent una recerca tant des del punt de vista matemàtic com artístic, on introduixo el marc teòric del nombre d' or amb el seu seguiment en l' art i en la naturalesa. El principal objectiu és esbrinar si realment la música es pot relacionar amb la proporció àuria, fent un recorregut pels diferents compositors, els quals tenen indicis d' haver fet servir la proporció àuria.

METODOLOGIA

El treball sobre la música i la proporció àuria s' ha fet, en la major part, a partir de la informació bibliogràfica de llibres en castellà, ja que es tracta d' un tema que fins fa relativament poc no havia conegut un estudi ampli i monogràfic. També, gràcies a Internet, he trobat molta informació genèrica relacionada amb la música i la proporció àuria, on he pogut trobar les partitures que m' han facilitat un anàlisi més visual de les obres.

En el treball no podia començar a parlar directament de la proporció àuria relacionada amb la música, ja que és un tema poc conegut. Per tal que serveixi com a punt de partida he cregut convenient incloure-hi una primera part amb informació genèrica sobre la proporció àuria i les seves aplicacions més conegudes en les arts i en la naturalesa, sense deixar de costat l' explicació matemàtica del nombre d' or. En les següents parts ja faig referència a la música i la proporció àuria, endinsant-me en l' estudi de la música i la proporció àuria, amb l' anàlisi d' algunes de les obres de J.S. Bach i Béla Bartók.

Com a part pràctica he optat a la pròpia composició d' una peça musical, on he utilitzat la proporció àuria com a recurs principal.

1ª PART. PRESENTACIÓ DE LA PROPORCIÓ ÀURIA

1. Demostració matemàtica

1.1. Definició del nombre d' or

El nombre d' or, o nombre auri, és un nombre irracional que representem amb la lletra grega *phi* (Φ). Va ser una troballa dels grecs de l' època clàssica i la seva història documentada comença en un dels llibres més cèlebres, comentats i reimpressos de la història: els *Elements de Geometria* de Euclides, escrit al voltant de 300 anys abans de Jesucrist.

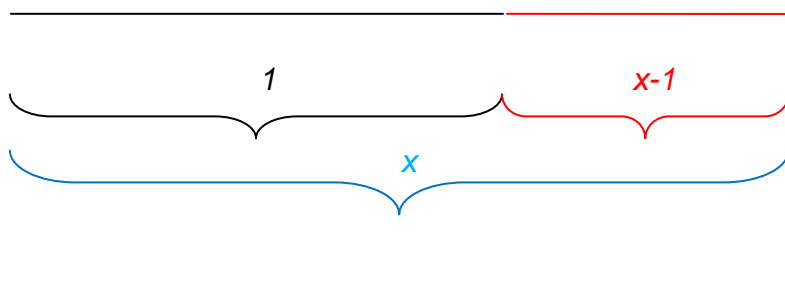
Elements de Geometria es compon de tretze llibres. Del llibre I al llibre VI es dedica a la geometria elemental, del VII al X, a qüestions numèriques, del XI al XIII a la geometria dels sòlids. En el llibre VI, com tercera definició, apareix el text que va començar tot. La traducció castellana del cosmògraf de Felip II, Rodrigo Zamorano, de 1576, la presenta de la següent manera: “Dize se ser dividida una línea recta con razon extrema y media quando fuere que como se ha toda a la mayor parte, assi la mayor a la menor”. Traduït al català el text diu: “El tot és a la part com la part és a la resta”.

Aquesta mitjana i extrema raó, que apareix amb tanta modèstia, és el número que amb posterioritat es dirà número d' or o número auri i al que Luca Pacioli dedicarà tot un tractat en 1509, donant-li el nom de *divina proporció*. *Phi*, Φ , el símbol amb el que avui coneixem al número auri, se li va assignar en una època molt posterior, a principis del segle XX, quan el matemàtic nord-americà Mark Barr va proposar vincular el número amb Fidias, constructor del Partenó d' Atenes, i va prendre prestada la seva inicial.

Sabent que és un nombre, fins i tot situat en el grup dels irracionals. Per això farem una inversió profunda en la seva naturalesa matemàtica. El nombre d' or Φ , queda explicat i es calcula de la manera següent:

Considerem un segment de recta x i volem determinar el punt 1 . Si volem que el punt 1 divideixi el segment x segons la proporció àuria, la relació de la part més llarga amb la part més petita ha de ser igual a la relació del tot amb la part més llarga, és a dir, $1/x - 1 = x/1$. Si aquesta condició es compleix, això vol dir que el punt 1 divideix el segment x en mitjana i extrema raó.

La proporció àuria i la música



Aquesta igualtat ens porta (ja que per a que dos fraccions siguin iguals o equivalents ho tenen que ser els seus productes en creu:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \iff x \cdot (x-1) = 1 \cdot 1 \text{) a la equació de segon grau:}$$

$x \cdot (x-1) = 1 \cdot 1 \longrightarrow x^2 - x = 1$ equivalent a $x^2 - x - 1 = 0$ (1). Que té dues solucions, i la positiva, que és la que ens interessa, és $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$. Aquesta és la relació que busquem i a la que diem Φ : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,618$. Com que la solució de l'equació (1) és la relació entre les longituds dels segments, aquesta serà la mateixa qualsevol que sigui el segment del que partim. Dit d'una altra manera: la proporció àuria tindrà el mateix valor amb independència de la longitud del segment inicial.

Com que en la seva expressió apareix una arrel quadrada no exacta, el número Φ serà un nombre irracional. El que vol dir que mai podrem tenir una expressió decimal exacta. I encara més: que no hi haurà cap grup dels seus decimals que es repeteixi de mode periòdic. El número Φ és, doncs un número decimal d'infinites xifres, no periòdic, del que es poden conèixer, això sí, tantes xifres exactes com vulguem a partir de les de la $\sqrt{5}$. De totes maneres, no ens aportarà gran cosa, ja que la importància de Φ és més geomètrica que numèrica. En tot cas, $\Phi = 1.618033988749894\dots$, amb 15 decimals, té precisió més que suficient per qualsevol càlcul que vulguem emprendre.

1.2. Successió de Fibonacci

La història de les matemàtiques és a vegades sorprenent, i per descomptat, sempre inesperada. El vell número auri, tant geomètric, va emparentar segles després d'unes fraccions que van sorgir d'una successió purament aritmètica. L'artífex del matrimoni va ser el més destacat matemàtic de l'Edat Mitjana, Leonardo Pisano, més conegut com Fibonacci.

Fibonacci va escriure obres de geometria, àlgebra i teoria de números, de la que va ser un pioner, però la més coneguda tracta sobre el càlcul. *El Liber abaci* (Llibre de l'àbac), publicat al 1202. A més de l'ús de les xifres i dels mètodes de càlcul, el *Liber abaci* aborda la teoria de números (descomposició amb factors primers, criteris de divisibilitat...), conté problemes d'àlgebra de primer grau i per suposat parla de comptabilitat mercantil, de la regla que en els venerables llibres de aritmètica mercantil es deia repartiment de beneficis i pèrdues i del canvi de monedes. Però el més conegut dels problemes proposats en el *Llibre de l'àbac* és el famós problema dels conills, la solució del qual és la successió que avui es coneix amb el nom de Fibonacci.

El problema està anunciat de la següent manera: *Quantes parelles de conills tindrem a finals d'any si comencem amb una parella que produeix cada mes una altra parella que procrea al seu torn als dos mesos de vida?*

Per a resoldre'l, Fibonacci, com a bon mercader i financer, va fer una taula. En ella desglossava el creixement de la seva família de conills i feia un seguiment del número de parelles que tenia en acabar cada mes. La columna final mostra el número total de conills. Una ullada ràpida ens permet advertir un curiós comportament en la successió: cada terme s'obté com a suma dels dos que el precedeixen.

La proporció àuria i la música

Mes	Generación	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Total
1º		1						1
2º		1						1
3º		1	1					2
4º		1	2					3
5º		1	3	1				5
6º		1	4	3				8
7º		1	5	6	1			13
8º		1	6	10	4			21
9º		1	7	15	10	1		34
10º		1	8	21	20	5		55
11º		1	9	28	35	15	1	89
12º		1	10	36	56	35	6	144

Els números de la última columna componen l' anomenada successió de Fibonacci, definida per la llei:

$$a_1 = 1; a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 2).$$

Vegem una primera relació d' aquesta successió amb el nombre auri.

$\phi^1 = \phi + 0$	$\phi^6 = 8\phi + 5$	$\phi^{11} = 89\phi + 55$
$\phi^2 = \phi + 1$	$\phi^7 = 13\phi + 8$	$\phi^{12} = 144\phi + 89$
$\phi^3 = 2\phi + 1$	$\phi^8 = 21\phi + 13$	$\phi^{13} = 233\phi + 144$
$\phi^4 = 3\phi + 2$	$\phi^9 = 34\phi + 21$	$\phi^{14} = 377\phi + 233$
$\phi^5 = 5\phi + 3$	$\phi^{10} = 55\phi + 34$...

Si ens fixem en els coeficients de les successives potències de Φ veiem que són dos termes consecutius de la successió de Fibonacci. De manera que, sent a_n el terme de lloc n de la successió de Fibonacci, podem posar com expressió general de aquestes potències del número auri $\Phi^n = a_n \Phi + a_{n-1}$.

La proporció àuria i la música

Continuem amb altres relacions. Si fem el quocient entre cada un dels termes de la successió de Fibonacci i a l' anterior: a_n/a_{n-1} . Al principi, els resultats tenen poc a veure amb el Φ , però continuem. Que descobrim? Doncs si, efectivament, de sobte la diferència comença a reduir-se fins un nivell sorprenent. En la sèrie de Fibonacci, la raó entre un terme i el seu precedent tendeix molt ràpidament a un límit que és precisament $\Phi = 1.61803398\dots$

Lugar	Término	a_n/a_{n-1}	Diferencia con Φ
1	1		
2	1	1.0000000000000000	-0.618033988749895
3	2	2.0000000000000000	+0.381966011250105
4	3	1.5000000000000000	-0.118033988749895
5	5	1.6666666666666667	+0.048632677916772
6	8	1.6000000000000000	-0.018033988749895
7	13	1.6250000000000000	+0.006966011250105
8	21	1.615384615384615	-0.002649373365279
9	34	1.619047619047619	+0.001013630297724
10	55	1.617647058823529	-0.000386929926365
11	89	1.618181818181818	+0.000147829431923
12	144	1.617977528089888	-0.000056460660007
13	233	1.6180555555555556	+0.000021566805661
14	377	1.618025751072961	-0.000008237676933
15	610	1.618037135278515	+0.000003146528620
16	987	1.618032786885246	-0.000001201864649
17	1,597	1.618034447821682	+0.000000459071787
18	2,584	1.618033813400125	-0.000000175349770
19	4,181	1.618034055727554	+0.000000066977659
20	6,765	1.618033963166707	-0.000000025583188

És a dir, límit $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \Phi$. Això demostra que, en l' infinit, aquesta és una progressió geomètrica amb raó igual a Φ .

$\frac{1}{1} = 1.000000$	$\frac{8}{5} = 1.600000$	$\frac{55}{34} = 1.617647 \dots$	$\frac{377}{233} = 1.618025 \dots$
$\frac{2}{1} = 2.000000$	$\frac{13}{8} = 1.625000$	$\frac{89}{55} = 1.618181 \dots$	$\frac{610}{377} = 1.618037 \dots$
$\frac{3}{2} = 1.500000$	$\frac{21}{13} = 1.615384 \dots$	$\frac{144}{89} = 1.617977 \dots$	$\frac{987}{610} = 1.618032 \dots$
$\frac{5}{3} = 1.666666 \dots$	$\frac{34}{21} = 1.619047 \dots$	$\frac{233}{144} = 1.618055 \dots$	$\frac{1597}{987} = 1.618034 \dots$

Com en el cas del nombre d' or, el que va indicant totes aquestes comprovacions és cert a nivell general: el límit dels quocients dels termes de la successió de Fibonacci és Φ .

1.3. Relacions numèriques sorprenents

Com veiem, la successió de Fibonacci permet aproximar el número Φ tant com vulguem per mitjà dels seus quocients, però té moltes més utilitats a part de la resolució d' un problema de conills, i també presenta relacions molt peculiars amb altres protagonistes estel·lars de la matemàtica.

Suma dels termes de la successió de Fibonacci

Si triem deu termes consecutius qualsevol de la successió i els sumem, obtenim sempre un múltiple de 11. És el cas dels deu primers, la suma de la qual és: $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55 = 143 = 11 \cdot 13$. O lo mateix passa amb $21+34+55+89+144+233+377+610+987+1597 = 4147 = 11 \cdot 377$.

Però no només és això, sinó que, a més, aquesta suma (com es veu en ambdós casos) és exactament 11 vegades el terme que ocupa el sèptim lloc dels sumands (13 en el primer cas i 377 en el segon).

Més sorpreses encara. La suma d' un número n qualsevol de termes de la successió des del primer és igual al terme que ocupa la posició $n + 2$ després de restar-li una unitat. Ho veiem en el cas dels deu primers, que sumen 143, que és igual al terme situat en lloc 12 (144) menys 1. O en el cas dels 17 primers, la suma de la qual és 4180 (igual al terme a_{19} , que és 4181, menys 1).

Expressat en fórmula, el que estem dient és $1+1+2+3+5+\dots a_n = a_{n+2} - 1$.

Les ternes pitagòriques

Tot i que hi ha infinites ternes pitagòriques no és massa fàcil trobar-se-les. D' aquí la utilitat de la successió de Fibonacci, que proporciona un mètode automàtic per fer-ho. Ho presento en aquest apartat, però abans, anem a intentar comprendre la relació entre Fibonacci, Pitàgores i el nombre d' or.

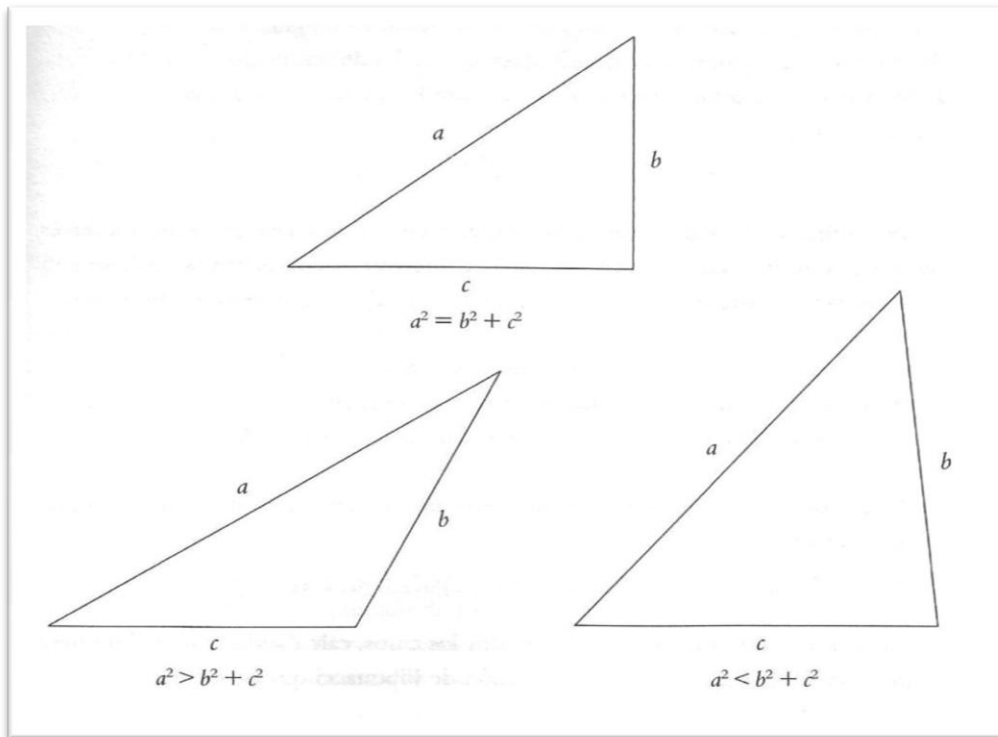
Un dels resultats matemàtics més famosos de la humanitat és el teorema de Pitàgores: en tot triangle rectangle, el quadrat de la longitud del costat major (la hipotenusa) és igual a la suma dels quadrats de les longituds dels altres dos (els catets).

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (T)$$

Des del punt de vista geomètric, com l' àrea d' un quadrat és igual al quadrat del seu costat, el teorema de Pitàgores afirma que si fem quadrats els costats dels quals siguin els de un triangle rectangle, l' àrea del quadrat construït sobre l' hipotenusa té una àrea igual a la suma de les àrees dels altres dos.

Aquesta mateixa expressió permet saber com és un triangle segon els seus angles, sense mesurar-los. N' hi ha prou amb fer els quadrats de les longituds dels tres costats i comparar el quadrat del costat major amb la suma de les longituds dels altres dos. Si aquesta suma és igual, estem davant d' un triangle rectangle. Si és major, és un triangle obtusangle (l' angle major és obtús, sobre passa els 90°). Si la suma és menor, el triangle és acutangle (els tres angles són menors de 90°)

La proporció àuria i la música



Quan els valors dels costats d' un triangle rectangle són números sencers, formen un conjunt de tres números que s' ha denominat terna pitagòrica. És a dir, que una terna pitagòrica és un conjunt de tres números sencers (a,b,c) que satisfà que $a^2 = b^2 + c^2$.

A continuació, mostrem el mètode per trobar ternes pitagòriques a través de la successió de Fibonacci. Triem quatre termes consecutius qualssevol de la successió, com per exemple, 2,3,5 i 8. Amb ells formem tres números:

1. El producte dels dos dels extrems $2 \cdot 8 = 16$;
2. El doble del producte dels dos centrals $2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$;
3. La suma dels dos quadrats dels dos centrals: $3^2 + 5^2 = 34$

Podem comprovar fàcilment que aquests tres números (34,30,16) formen una terna pitagòrica :

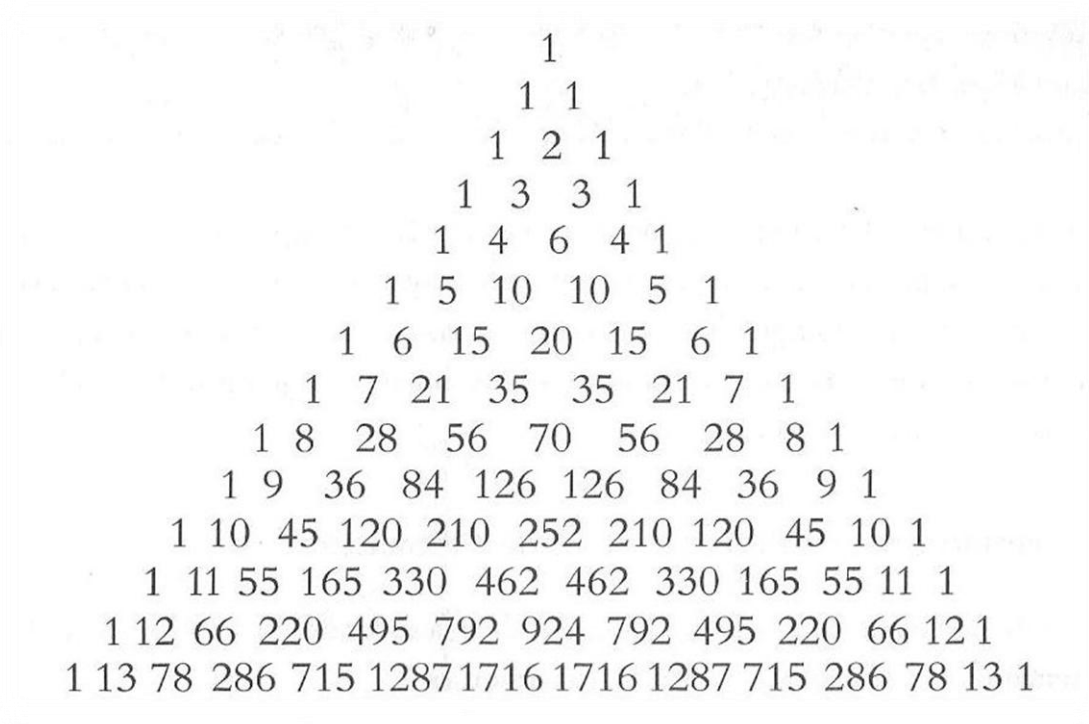
$$16^2 = 256 \quad 30^2 = 900 \quad 34^2 = 1156 \quad \longrightarrow \quad 256 + 900 = 1156.$$

Lo que obtindrem sempre, en tots els casos, calculant amb qualssevol quatre termes consecutius de la successió de Fibonacci que provem.

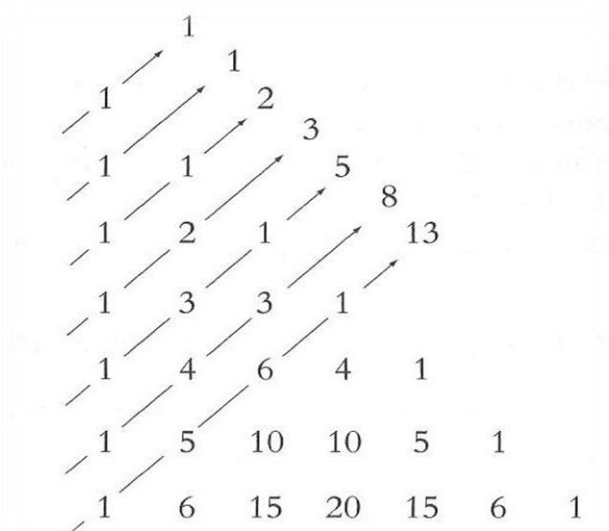
El triangle de Pascal i la successió de Fibonacci

Encara que el triangle de Pascal és conegut amb altres noms fora d' Europa, és sens dubte una de les disposicions numèriques més cèlebres. El matemàtic francès la va utilitzar per avançar en el descobriment de la fórmula general de la potència del binomi, però aquesta disposició triangular dels números ja era coneguda pels científics xinesos i també pel matemàtic persa del segle XII Omar Khayyám.

El triangle de Pascal es compon de la següent manera: la primera fila és 1, després, cada fila té un nombre més que l' anterior i cadascun dels seus elements és igual a la suma dels dos termes que té damunt, en la fila superior. La seva pròpia definició indica la seva relació amb la successió de Fibonacci, que es defineix de manera semblant.



Amb aquests antecedents, no podem esperar una altra cosa que una relació numèrica directa entre ambdós. N' hi ha prou amb sumar en diagonal els elements del triangle de Pascal, per aconseguir la successió de Fibonacci. L' esquema següent permet comprovar-ho amb facilitat:



Números primers en la successió de Fibonacci

En una successió amb tantes peculiaritats com la de Fibonacci, la varietat de manifestacions és inacabable. Per exemple, podem observar que els termes a_n de la successió de Fibonacci que són primers només poden ocupar llocs n que siguin primers, mentre que el contrari no és cert. Per exemple, el terme $n = 19$ (un lloc primer), és $a_n = 4181 = 37 \cdot 113$ (per tant no primer).

Jugar amb els números primers amb Fibonacci ens mostra també una conjectura encara no demostrada: la successió de Fibonacci conté infinits números primers. A dia d' avui, ningú sap si aquesta conjectura és veritable o falsa.

1.4. La forma dels rectangles i el nombre d' or

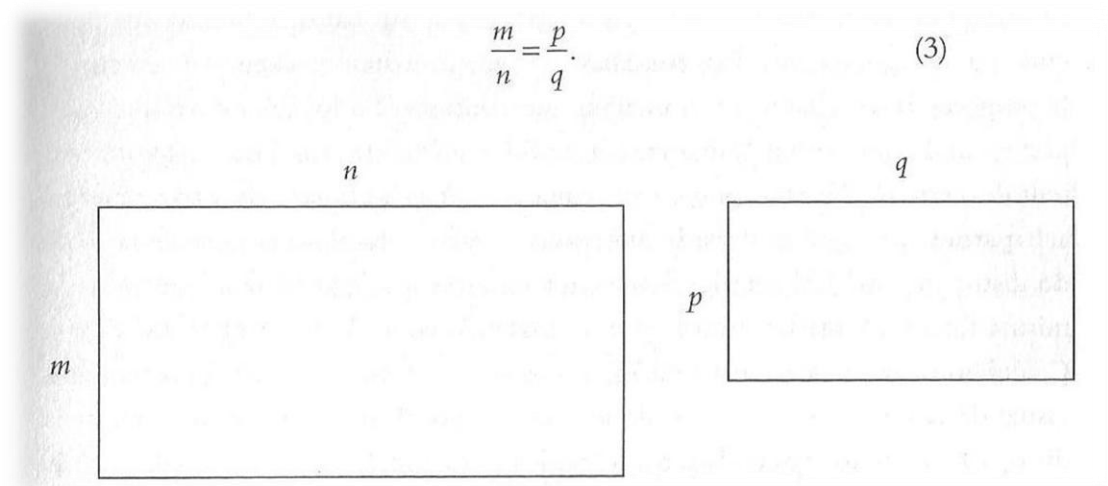
En les carteres i les bosses dels ciutadans moderns s' acumulen documents identificatius i targetes de tot tipus: targetes de crèdit o de visita; carnets de biblioteques, piscines, gimnasos o videoclubs; en alguns països, carnets d' identitat o de pertinença a algun servei públic de salut... Els extraïem i tornem a desar-los a diari sense prestar atenció a un fet que no és circumstancial ni té importància: la majoria d' aquest tenen la mateixa mida i forma, o, com a mínim, la mateixa proporció.

Esbrinar quina raó subjacent a tot i això és tan fàcil com mesurar i comparar els seus costats: el quocient entre les longituds dels costats major i menor és, en la gran majoria dels cassos, un número molt pròxim a 1,618 el número Φ . No és cap casualitat

La proporció àuria i la música

que el quocient de la majoria de les targetes examinades sigui el mateix: es tracta d'una mesura convencional.

Prenem aquest quocient entre les longituds dels seus costats diferents per definir la forma dels rectangles. Si coincideix, direm que tenen la mateixa forma. En termes matemàtics, direm que els rectangles amb aquesta propietat són rectangles semblants. Per tant, dos rectangles que tenen els costats de longituds m, n i p, q (amb $m < n$ i $p > q$), seran semblants quan $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ (3)



El quocient m/n caracteritza a un rectangle. Així, parlarem de rectangle mòdul k quan el quocient m/n valgui k . Quant menor és el quocient m/n , més allargat és el rectangle. El cas extrem el trobem quan m/n és la unitat. Llavors aconseguim una figura particular que ens resulta molt familiar: un quadrat. El quadrat és un cas particular de rectangle, el de mòdul 1. Com veiem, no tots els rectangles són tant semblants com pensàvem.

Troblem proves patents de les diferències entre rectangles –de tot tipus, no necessàriament auris- quant observem la evolució de les pantalles del televisors o del cinema. La mesura clàssica dels televisors era la proporció 4:3. Un procés reeixit de canvi de format ha implantat un nou estàndard, el dels televisors plans i digitals, de proporció 16:9. En ambdós casos, es tracta de la relació entre les longituds dels seus costats. Si veiem una pel·lícula o un programa amb ambdues pantalles a la vegada advertirem la norma afecte de la proporció del quadrat en la imatge que conté. En els televisors antics, per exemple, les figures humanes són molt més estilitzades, més allargades en sentit vertical, mentre que en les pantalles planes les figures humanes

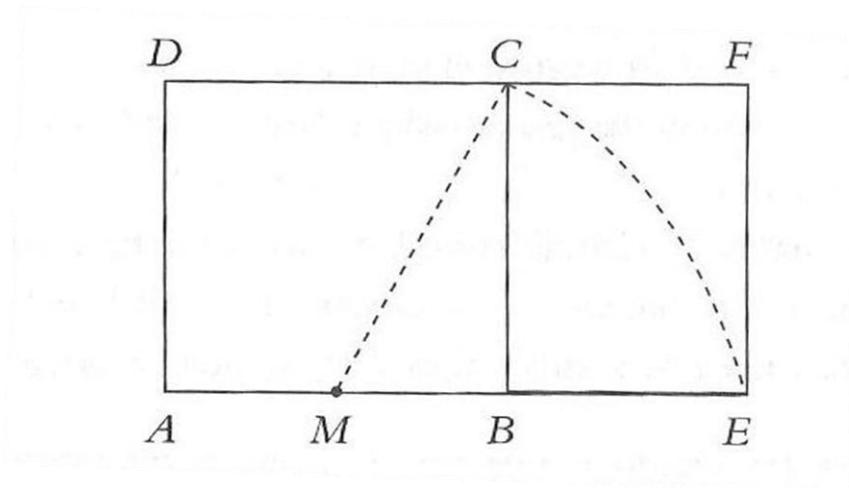
La proporció àuria i la música

semblen escarransides. Un simple càlcul ens mostra que no són rectangles de la mateixa forma. Des de un punt de vista matemàtic, està clar que $9/16 \neq 3/4$. Calculem: en realitat $3/4 = 0,75$, mentre que $9/16 = 0,5625$. El rectangle visual de la televisió clàssica és de mòdul major. Els televisors panoràmics distorsionen en horitzontal la senyal televisiva tradicional perquè la pantalla és més allargada.

L'efecte contrari té lloc quan una pel·lícula rodada per la gran pantalla, en format panoràmic, es veu en una pantalla 4:3, més quadrada. Normalment es retalla la imatge per els dos costats per omplir tota la pantalla, amb el que no només es perd imatge, sinó una part important de la màgia.

1.5. Construcció d' un rectangle auri

Partim d' un quadrat $ABCD$ el costat del qual serà menor del rectangle auri que anem a construir. Marquem el punt mig M d' un dels seus costats AB . Amb centre en M i radi MC (distància de M a un del vèrtex que no estan en el costat al que pertany M) tracem un arc que talli la prolongació de AB . Anomenarem E el punt per on talla. La longitud de AE és la longitud del costat del rectangle auri que busquem. A partir de llavors, només cal fer la perpendicular per E que talla en F . Així, aconseguim el rectangle $AEFD$, el nostre desitjat rectangle auri.



La proporció àuria i la música

Aprofitem el rectangle auri que hem construït per comprovar la relació àuria, calculant els seus costats. Suposem que el costat $AB = AD = 1$ i trobem $AE = AM + ME = 1/2 + ME$. Com ME és igual a la hipotenusa del triangle rectangle MBC , podem aplicar el teorema de Pitàgores i tindrem

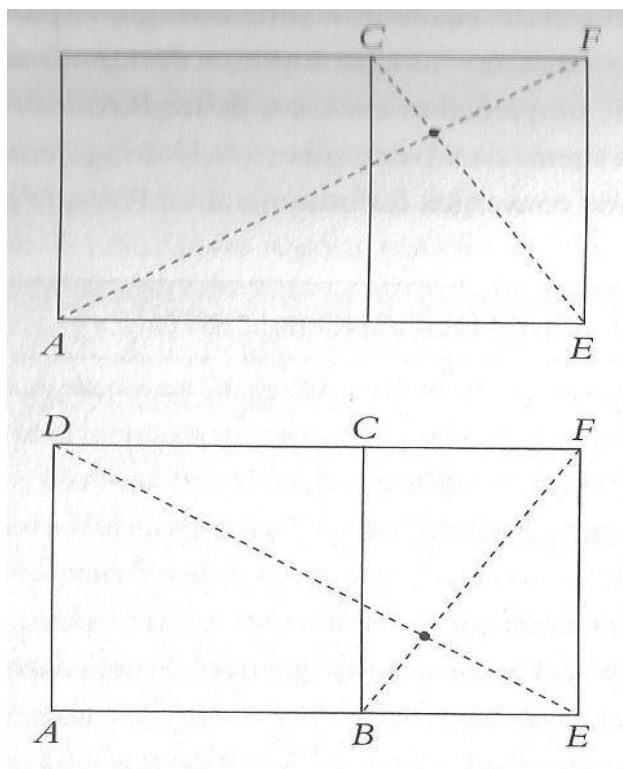
$$ME^2 = MC^2 = MB^2 + BC^2 = (1/2)^2 + 1^2 = 1/4 + 1 = 5/4. \text{ D' on}$$

$$ME = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}. \text{ I per tant } AE = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

És a dir, que els costats del rectangle $AEFD$ que hem construït són 1 i Φ . És el rectangle auri que busquem.

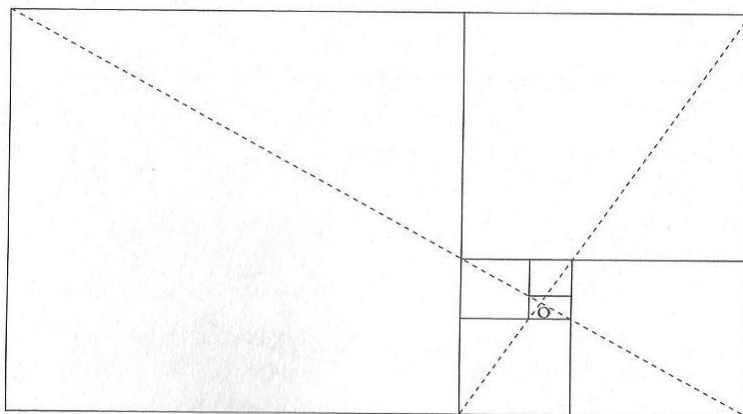
1.6. Propietats del rectangle auri

Si li traiem un quadrat al nostre rectangle auri acabat de fer, resulta un rectangle $BEFC$ que també és auri. Si fem les diagonals d'aquests dos rectangles auris veurem que es tallen sempre en angle recte. Això passa amb els parells AF i ED , així com en DE i BF , que són perpendiculars entre si. Podem veure-ho en les figures següents:



La proporció àuria i la música

Considerem un moment el rectangle auri de la segona figura per descobrir una propietat molt sorprenent. Si busquem altres rectangles auris cada vegada més petits a través de successives sostraccions de quadrats, i en cada una d'elles tracem les dos diagonals que apareixen en la figura, observem que totes estan situades sobre les dos rectes DE i BF . Així, seran sempre perpendiculars i el seu punt de tall serà sempre el mateix punt O .



Si poguéssim amb un microscopi tots els rectangles que es poden anar formant a l'anar sostraint quadrats, veuríem que el punt de tall d'aquestes diagonals roman constant tot i que anem disminuint la seva mida en un factor Φ . Aquesta increïble propietat és exclusiva dels rectangles auris. El punt O és una mena de vèrtex, una espècie de forat negre, un punt d'atracció infinita on convergeixen els innumerables rectangles auris que poden generar la nostra imaginació geomètrica. Per les qualitats extraordinàries d'aquests rectangles, s'ha proposat anomenar a aquest punt "L'ull de Déu".

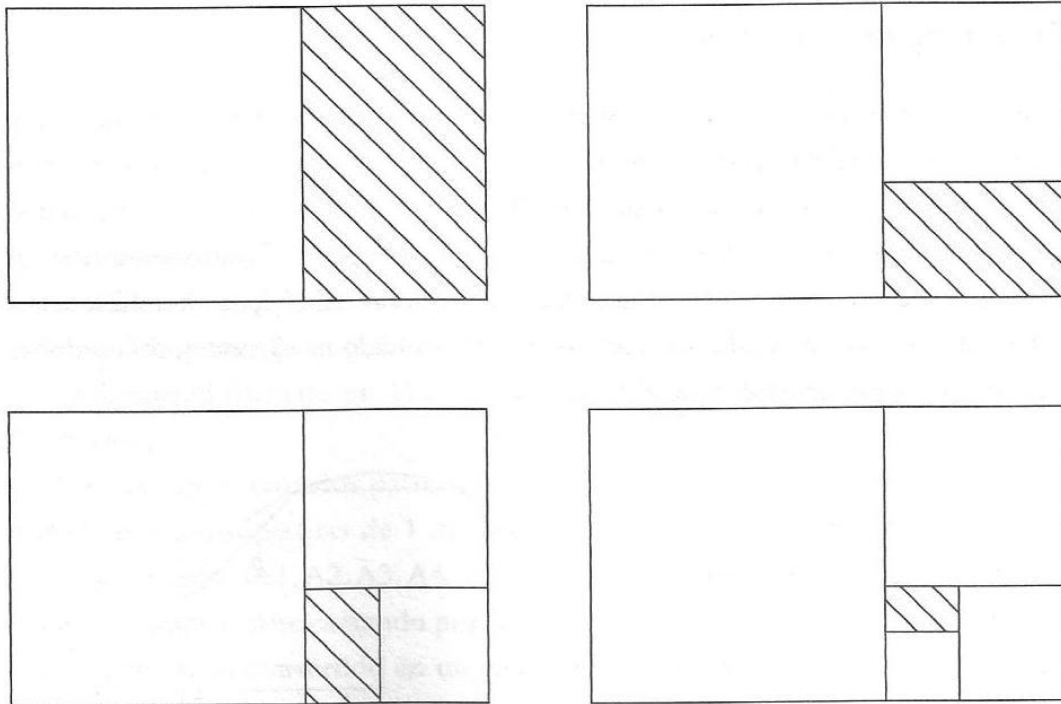
Si inscrivim un decàgon regular ¹ en una circumferència, la relació entre el radi de la circumferència i el costat del polígon és exactament Φ .

Per tant, podríem dir que un rectangle auri té per costats el radi de la circumferència i el costat del decàgon regular inscrit en ella.

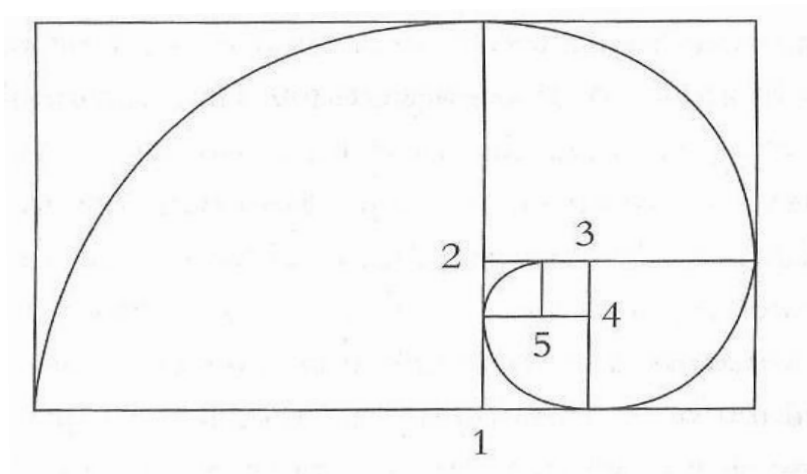
¹ Polígon de deu costats iguals, els angles dels quals són també iguals

1.7. Les espirals i el nombre d'or

Algunes de les manifestacions més prodigioses de Φ es troben en les espirals, en les que Φ té comportaments curiosos. Suposem que partim d'un rectangle auri el que anem restant quadrats per obtenir nous rectangles auri.

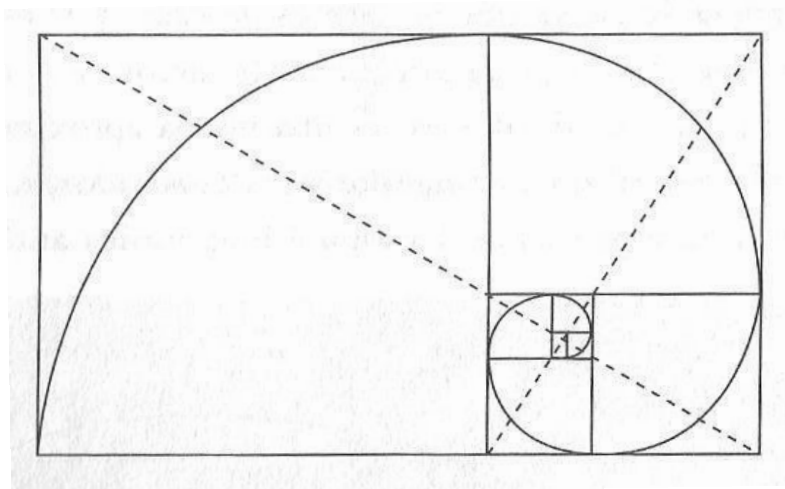


En cada un dels quadrats que sostraiem, tracem quadrants de circumferència amb radi el costat del quadrat i centre en el vèrtex de cada un d'ells. És a dir, en els punts 1,2,3,4,5...



La proporció àuria i la música

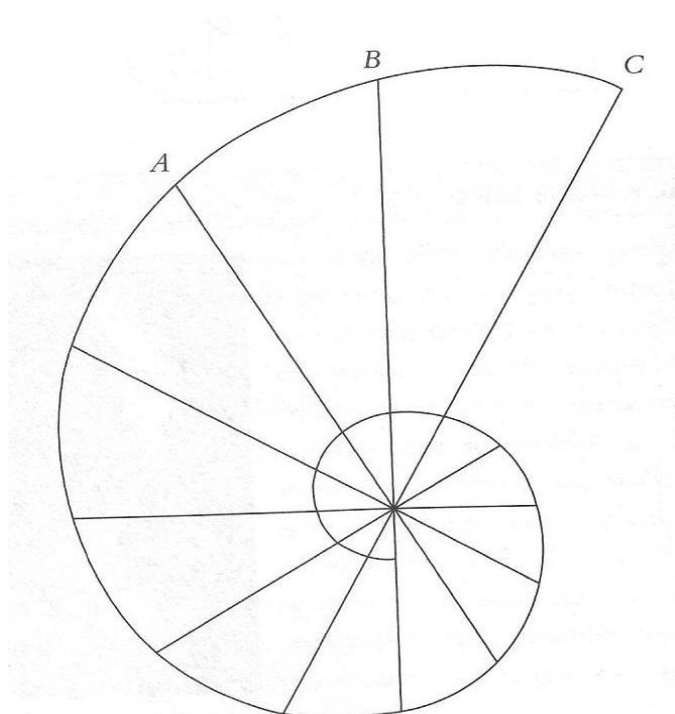
Si continuem de forma indefinida amb la successió de quadrants, s'obté l'anomenada espiral² logarítmica.



Una altra important propietat de l'espiral es que és equiangular, és a dir, si tracem una línia recta des de el seu pol, això es el seu punt d'inici, fins un punt qualsevol, l'angle de tall és sempre el mateix. Segons aquesta propietat, si volem mantenir constant l'angle amb el que observem un punt, tenim que aproximar-nos a ell seguint una trajectòria que formi un espiral logarítmica. També se li anomena espiral geomètrica, perquè el radi vector, és a dir, la recta que uneix el vèrtex amb el punt de l'espiral, creix amb progressió geomètrica, mentre l'angle que forma aquest radi ho fa amb progressió aritmètica.

De manera estricta, la corba que acabem de crear per aquest mètode no és un espiral, ja que està formada per diferents arcs de circumferència (quadrants) units de forma artificial, però es una bona aproximació d'una espiral logarítmica. L'espiral no és tangent a els quadrats, sinó que els talla, encara que amb angles molt petits. L'espiral logarítmica autèntica és la següent figura:

² L'espiral és una corba la forma de la qual no s'altera quan canvia la seva mida, tant si augmenta com si disminueix. Aquesta propietat es diu autosimilitud.



1.8. El nombre d' or i el pentàgon

Els assiris van descobrir de manera natural el pentàgon; apareix en les seves tauletes de fang, on podem veure marques dels cinc dits en l' argila tova. La figura suposa un problema pels grecs. En la seva opinió, l' únic mètode vàlid per traçar figures geomètriques eren la regla i el compàs, però amb ells no és possible dibuixar de forma directe un pentàgon regular.

El pentàgon regular

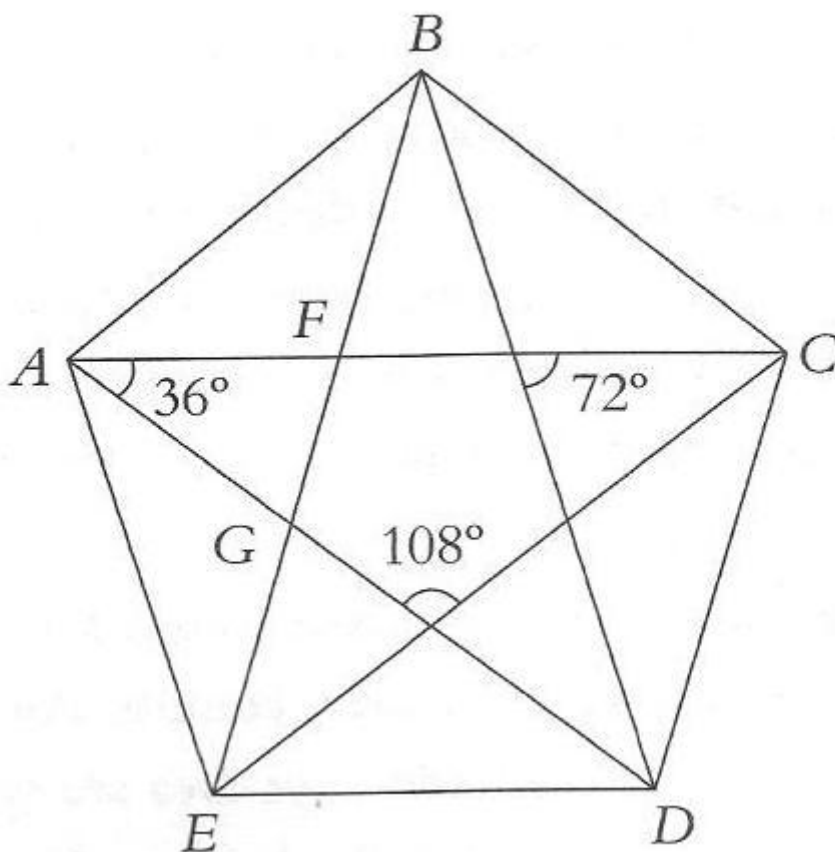
La construcció amb regla i compàs, segons la van iniciar els antics grecs, i es compresa en el seu terme tradicional, és un mètode amb moltes restriccions, algunes de les quals sonen una mica capritxoses. Consisteix en el traçat de punts, rectes (o segments) i circumferències (o arcs) amb una regla de la longitud infinita, sense marques que permeten mesurar o traslladar distàncies, una sola vorera i un compàs. Per aquest procediment, es pot traçar la mediatriu d' un segment (perpendicular en el seu punt mig), la bisectriu d' un angle, el simètric d' un punt respecte a un altre, la recta paral·lela o la perpendicular a una donada per un punt, la projecció d' un punt sobre una recta, i també es pot dividir un segment qualsevol en un número donat de parts iguals .

La proporció àuria i la música

Hi ha una sèrie de famosos problemes clàssics, la celebritat es deu precisament a que no poden resoldre's amb regla i compàs. Per exemple, la quadratura del cercle³, la duplicació d' un cub⁴ o la trisecció d' un angle⁵. Per al procediment directe de regla i compàs, tampoc es poden construir alguns polígons regulars, com el heptàgon o el pentàgon.

Però, el pentàgon regular si es pot traçar indirectament amb regla i compàs amb l'ajuda de Φ , i d' aquesta forma el número Φ va entrar en el espai de la geometria grega. També va ser un dels motius del despertar del interès dels clàssics en aquesta proporció.

Ara, considerem un pentàgon regular en el qual s' han dibuixat les diagonals.



³ Trobar un quadrat l' àrea del qual sigui igual a la d' un cercle donat

⁴ Trobar l' aresta d' un cub el volum del qual sigui el doble que l' original

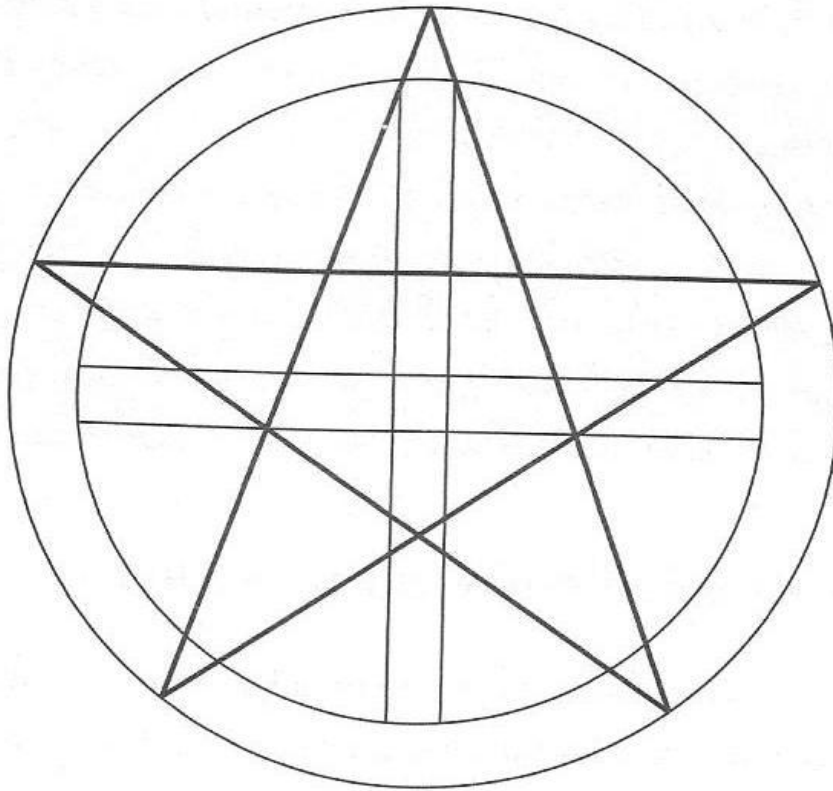
⁵ Dividir un angle donat en tres angles iguals

El simbolisme de l' estrella pentagonal

No seria res desgavellat preguntar-se per quina raó les estrelles que la humanitat a observat des de sempre en el firmament han acabat representant-se mitjançant pentàgons estrellats. El sentit comú fa pensar que es deu al seu parpalleig, provocat en la nostra percepció per la variació de densitat de l' aire i els fenòmens atmosfèrics. Sigui com sigui, poc a canviat aquest conjunt de circumstàncies des dels primers temps en que els nostres avantpassats començaven a escutar els cels amb l' intenció de desxifrar els seus significats ocults. Les representacions d' estrelles en forma de pentàgons estrellats són molt antigues; s' han trobat tant en tauletes mesopotàmiques com en jeroglífics egipcis.

El símbol de l' estrella pentagonal, anomenat pentalfa, va ser el distintiu dels pitagòrics, i servia per identificar els membres de la seva associació secreta. Per a ells, la pèntada, és a dir el cinc, era el número de l' harmonia en la salut i la bellesa, doncs suposava una equilibrada combinació del dos, el primer número par, o diada, i el tres, el primer imparell complet, la triada. Com va escriure l' escriptor i professor d' estètica romà Matila Ghyka, "el pentalfa o pentagrama serà, doncs, a la vegada, el símbol de l' Amor creador i el de la Bellesa viva, de l' equilibri en la salut del cos humà", i voldria afegir que, per extensió, també el símbol de l' ésser humà.

El pentalfa té una llarga història com a símbol de societats secretes. Figura també en l' anagrama dels Rosacruz i amb freqüència, en els de les lògies maçòniques.



L' estrella pentagonal és una figura d' allò més comú al nostre voltant com imatge gràfica dels significats més dispars. És el símbol de les estrelles de Hollywood en el Passeig de la Fama de Los Angeles, i a la vegada, el símbol de molts partits revolucionaris. Els seus cinc vèrtex representen el internacionalisme, associat cada un amb un continent. En combinació amb el color vermell, simbolitza el sofriment dels oprimits en la seva lluita per la emancipació i la sang que es derrama per aconseguir-ho.

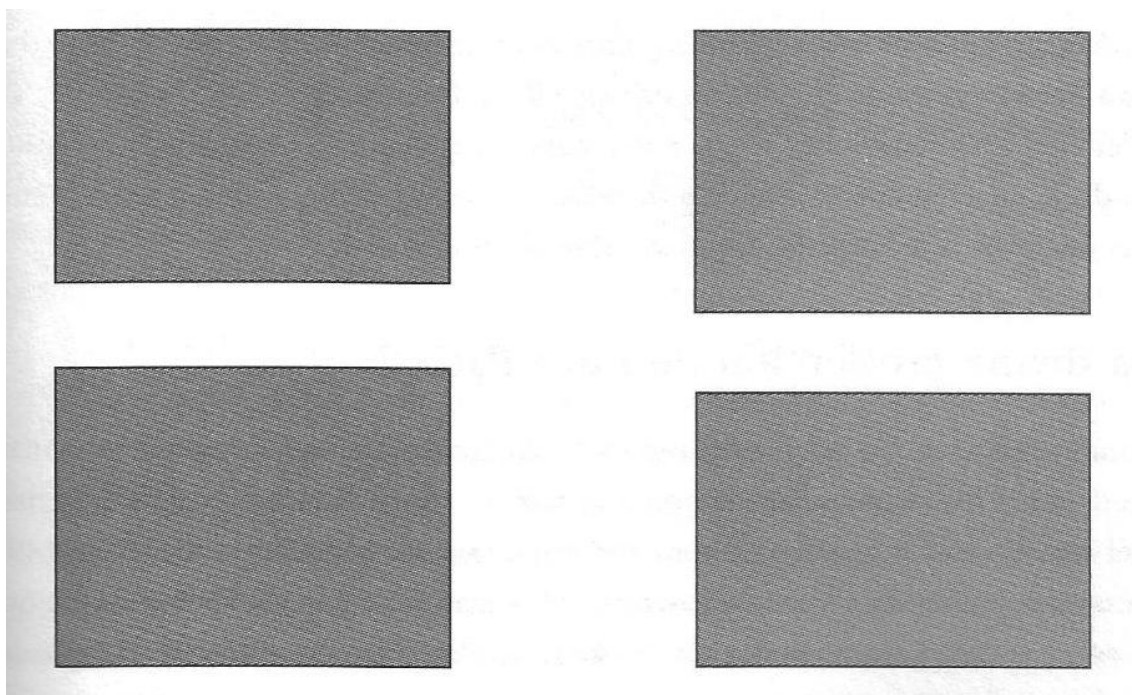
El seu poder simbòlic ho fa protagonista de multitud de banderes, no només les que professen una ideologia revolucionària. Apunta en les banderes d' alguns països de religió musulmana, com el Marroc, representant els cinc manaments de l' Islam. També són pentagonals les estrelles que indiquen cada un dels estats de la unió en la bandera d' Estats Units.

2. Aplicacions de la proporció àuria en l' art

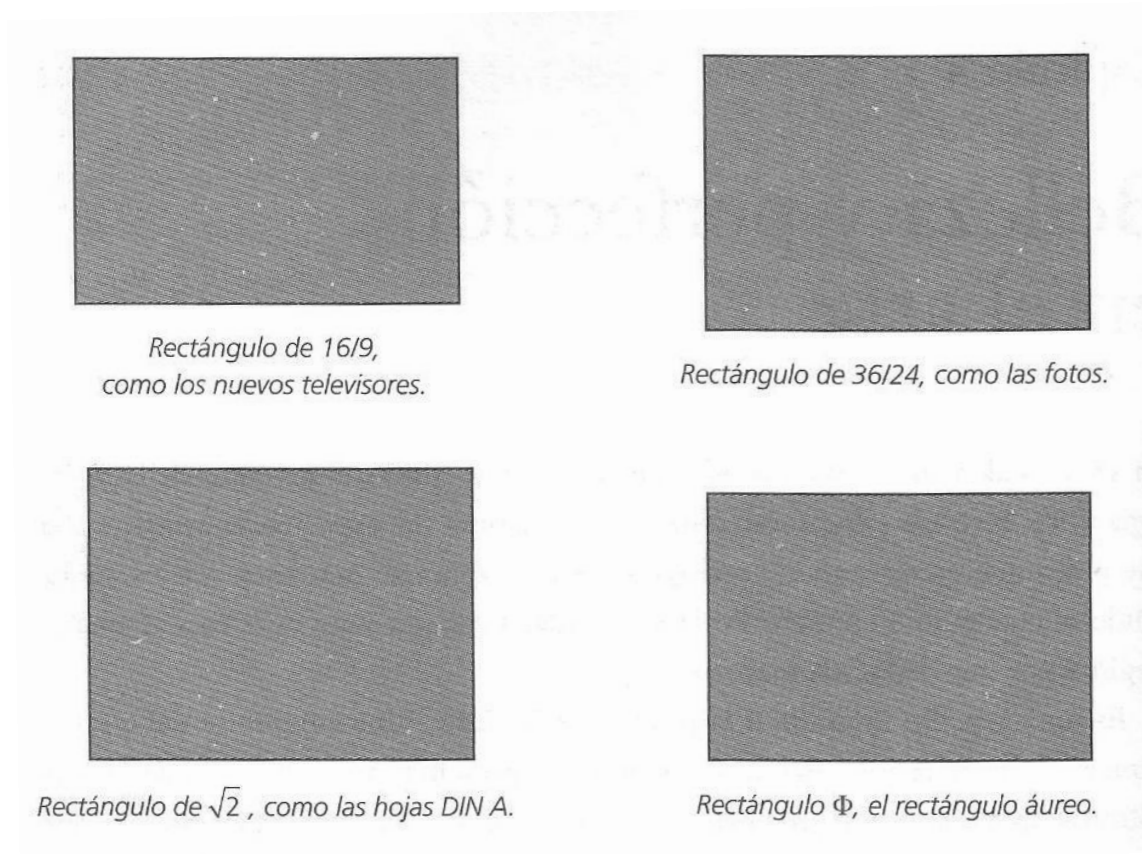
2.1. Bellesa i perfecció en l' art

Al 1876 l' alemany Gustav Theodor Fechner (1801 – 1887), l' inventor de la psicologia física, va fer un estudi estadístic amb persones sense experiència artística, a les que va demanar que escollissin el rectangle que els agradés més entre diversos, incloent el quadrat. El rectangle auri i altres variants molt pròximes van resultar escollides per una destacada majoria.

És molt senzill reproduir la prova de Fechner. Únicament s' ha de seleccionar una sèrie representativa de persones i presentar davant d' elles rectangles de diferents tipus. La simple pregunta sobre la qual els hi agrada més, dona un resultat sorprenent.



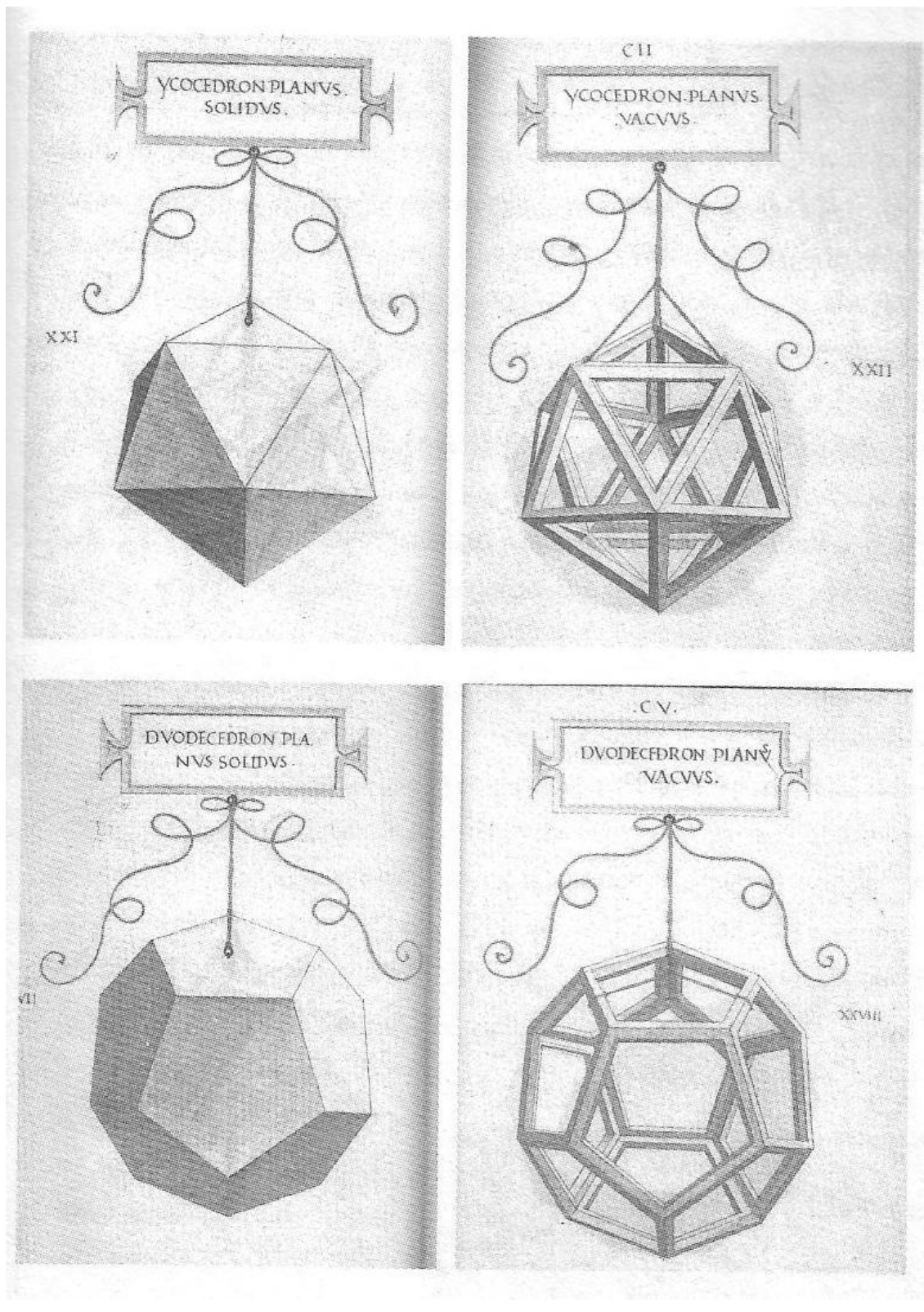
Fechner també va realitzar meticulosos estudis estadístics sobre les proporcions en el cos humà, i va concloure que “perquè un objecte sigui considerat bell des del punt de vista de la forma ha d' haver entre la part menor i la major la mateixa relació que entre la major i el tot”. Aquesta és la descripció de la relació àuria. La ciència, a la fi, semblava donar crèdit a la idea de que la divina proporció posseïa una harmonia i una bellesa intrínseques.



Molt abans d' això, però, artistes i arquitectes de totes les èpoques van arribar ja a una conclusió semblant. La influència de la secció àuria i les seves diferents manifestacions pot trobar-se ja en la Grècia clàssica, però la història de la seva relació amb l' art hauria d' arrencar, possiblement, amb el Renaixement i l' inici de la teorització rigorosa sobre l' acte creatiu.

2.1.1. La divina proporció de Luca Pacioli

Luca Pacioli va viure en la Itàlia del segle XV i començaments del segle XVI. Van ser ell i Leonardo Da Vinci els responsables de posar el número d' or en l' òrbita de la bellesa i l' art. Pacioli ho va fer en el seu llibre *De divina proportione*, escrit a finals del 1498. L' obra es va publicar a Venècia bastants anys més tard, al 1509, després de que el seu autor realitzés tres manuscrits. Fins la versió final no van aparèixer capítols fonamentals per la nostra petita història, com el *Tractato de la architectura*, inspirat per l' arquitecte romà Vitruvio.



De divina proportione fixa les proporcions que es deuen complir per aconseguir la bellesa excelsa, en forma de reflexió sobre la geometria. En l'obra apareixen els famosos dibuixos dels seixanta poliedres de mà del mestre Leonardo i també el seu

celebèrrim “Home ideal”, sobre la base de Φ , que ha sigut objecte d’ innumerables visites al llarg dels anys. D’ aquesta manera, conté els ingredient imprescindibles de les obres teòriques de més influència en la cultura occidental: un moment, el Renaixement; un lloc, Itàlia; i els protagonistes fonamentals, els artistes, arquitectes, matemàtics i filòsof que han escrit les pàgines de la història i de l’ art europeu.

2.1.2. Leonardo: la perfecció àuria

Leonardo Da Vinci (1452 – 1519) és un dels màxims exemples en la història de la idea del geni. Les seves aportacions no es limiten a uns pocs camps del coneixement humà, sinó que abasten àrees molt allunyades entre si: matemàtiques, física i química, enginyeria, tecnologia, pintura, arquitectura, etc. La meravella de Leonardo és que va ser excel·lent en tot el que va fer. Més tard o més aviat, les seves aportacions van acabar tenint rellevància en tots els camps que va cultivar. És el prototip de l’ home del Renaixement, que té interessos molt diversos i és competent en tots. L’ atracció que ha despertat el personatge al llarg del temps en tot el món s’ explica per la seva capacitat intel·lectual, però també per molts dels seus trets personals, que van construir l’ arquetip del geni que destaca en el seu temps. Per començar, la seva personalitat no era res en comú, i molt menys en la seva època. Vegetaria, esquerrà, és diu que homosexual, estava tant absorbit per la idea del progrés irrefrenable que no tenia prejudicis a l’ hora de vorejar o traspasar la legalitat en els seus experiments. A la seva llegenda contribueix la seva tendència a l’ hermetisme, doncs escrivia de manera criptogràfica, amb l’ imatge especular de les lletres; i la seva producció artística, escassa, però enormement enigmàtica, com la famosíssima *Gioconda*, de la que tantes coses falten per conèixer amb certesa.

Els dibuixos i manuscrits de Leonardo es reuneixen en deu còdexs conservats en diferents museus europeus. Un està en la col·lecció particular del magnat nord-americà Bill Gates, que va pagar per ell diversos milions de dòlars. Si escrivim el nom de Leonardo Da Vinci en qualsevol buscador d’ Internet, trobarem més de 12.400.000 pàgines relacionades amb ell. Leonardo va ser un teòric de l’ art de la pintura, i un ferm defensor de la seva imbricació amb les matemàtiques. La seva obra *Tratado de la pintura* comença amb la frase: “Ningú llegeixi les meves obres que no sigui matemàtic”. L’ obra va ser manuscrita cap al 1498, però no es va publicar fins a mitjans del segle següent.

Leonardo només va fer una tasca d’ il·lustrador en *De divina proportione*, però el propi Pacioli parla en la seva obra de la importància del geni en el terreny artístic. L’ autor diu: “Les piràmides d’ aquest llibre, com les demes figures, són també de la mà

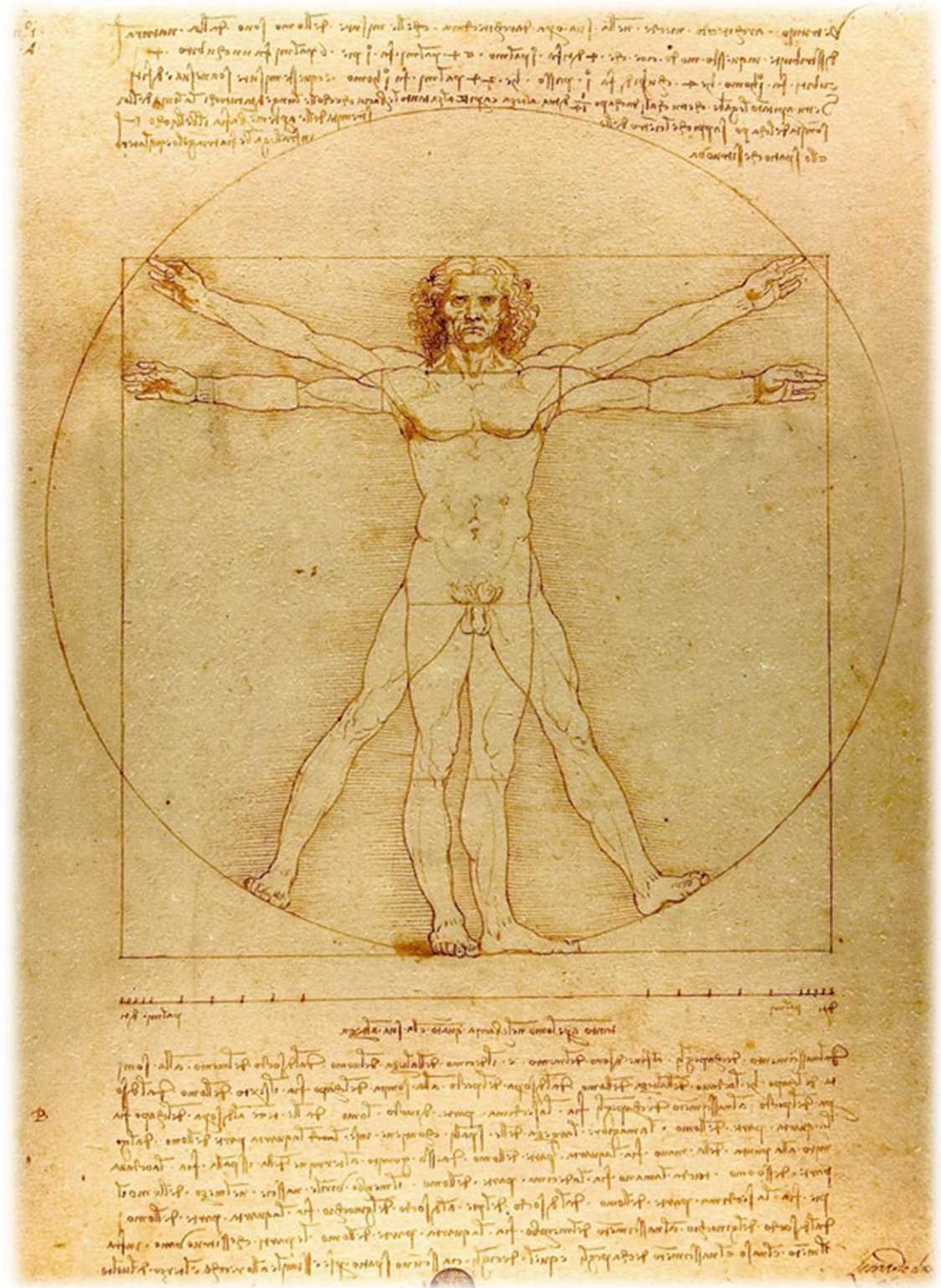
La proporció àuria i la música

del meu compatriota anteriorment nombrat, Leonardo Da Vinci de Florència, al que mai cap home ni tan sols s'ha aproximat en la ciència del dibuix". Aquestes figures, juntament amb *L' Home ideal*, són avui en dia veritables icones d' un estat del pensament que reuneix sensibilitat artística i científica, l' ideal humanístic. Sovint, en diferents moments de la història quan apareix una persona que és un fenomen físic en qualsevol disciplina, se la compara amb el model de Leonardo en *Divina proportione*.

Leonardo va aplicar el coneixement científic de les proporcions humanes als estudis de Pacioli i Vitruvio sobre la bellesa. Seguint l' ideal renaixentista, *L' Home ideal* o *l' Home de Vitruvio*, posa l' home en el centre de l' univers, ja que està inscrit en un cercle i en un quadrat. La figura segueix les recomanacions del romà Vitruvio (Marcus Vitruvius Pollio), l' arquitecte de Julio César que va viure en el segle I a.C. L' arquitecte, enginyer i tractadista romà va tornar a estar d' actualitat en el Renaixement, amb la traducció i publicació en 1486 de tota la seva obra escrita. En els decennis següents, les obres de Vitruvio van tenir múltiples edicions en totes les ciutats italianes de rellevància. L' arquitectura renaixentista les va prendre com a base per les seves teories, i Leonardo va confessar sovint que el romà era la seva gran inspiració.

Vitruvio dona referències sobre la figura humana basada en raons simples. Diu que l' altura és igual a la envergadura, i que un home tombat, a l'estendre braços i cames, descriu un cercle. Molts artistes van intentar recollir en una mateixa il·lustració aquestes tres formes: la figura humana, la quadrada i la circular, no sempre amb resultats afortunats. Leonardo va trobar una solució original i elegant, basada en que el quadrat i la circumferència tenen centres diferents. Els genitals són el centre del quadrat i el melic és el centre de la circumferència. Les proporcions ideals del cos humà que es desprenen d' aquesta figura corresponen a la raó àuria entre el costat del quadrat i el radi del cercle. Així, la geometria uneix tècnica i bellesa a través de la raó àuria.

La proporció àuria i la música



Les mesures ideals

L' *Home ideal* representa les relacions aproximades normals en el cos humà d' una persona adulta, utilitzades des de la Grècia clàssica com cànon artístic per representar a la persona ideal. A continuació, exposem les proporcions de manera clara:

Altura total = braçada (distància entre les puntes dels dits amb els braços oberts) = 8 pams = 6 peus = 8 cares = 1,618 x altura melic (distància del terra al melic).

Com veiem, apareix finalment la relació 1,618, una bona aproximació a Φ . Si comprovem aquestes distàncies en el nostre propi cos, amb tota seguretat ens emportarem un disgust. És difícil que ens aproximem a elles; són les proporcions d' una bellesa idealitzada. Hi ha una altra manera de comprendre el cànon ideal de bellesa: l' estadística. Si comparem els mesuraments individuals d' una mostra significativa de persones amb les mesures ideals veurem que, com a mitjana, ens apropem bastant al cànon de bellesa: l' ésser humà és ideal només com promig. El matemàtic belga Lambert Adolphe Quételet (1796-1874) va ser un dels pares de l' estadística moderna; en 1871 els seus estudis estadístics sobre les proporcions dels homes europeus van confirmar per complet les relacions ideals.

A partir d' aquí es plantegen preguntes interessants. A quines proporcions responen els cànons de bellesa d' altres civilitzacions, com l' hindú o la xina, les diferències físiques de les quals respecte als trets europeus es revelen a primera vista? Segur que la bellesa és igual d' ideal en les diferents cultures, però, és la mateixa idea? Les enquestes realitzades sobre mesures del cos humà en diferents països i cultures han demostrat que tots som iguals. Per acabar de tancar el cercle, existeixen estudis del mateix tipus sobre l' ensenyament en matemàtiques que confirmen que les estructures mentals tampoc canvien al passar d' un continent a un altre.

2.2. El nombre d' or en la pintura

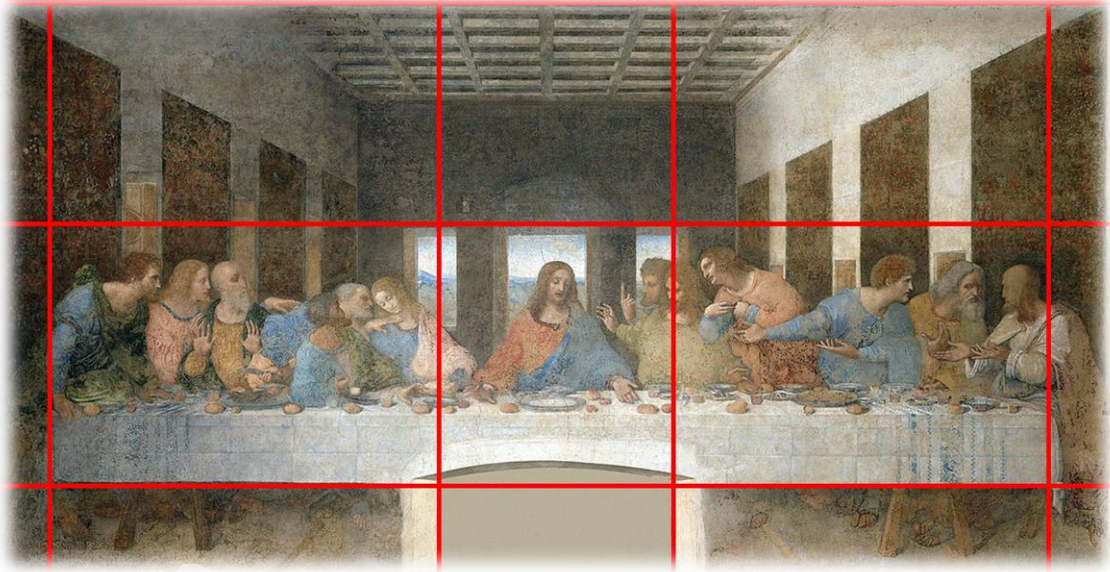
En el Renaixement, el desenvolupament de la perspectiva i la recerca de les proporcions ideals per la bellesa van fer coincidir en el temps i en la dedicació artistes i científics. El moment de la codificació de la perspectiva és també el principi de la geometria projectiva, que els propis pintors renaixentistes fonamentaren al aconseguir plasmar de manera realista els objectes tridimensionals en els seus quadres, és a dir, en dos dimensions. Leonardo Da Vinci va jugar un paper fonamental en aquests èxits, però també ho farien Rafael o Durero.

Al 1435 va aparèixer l' obra fonamental de la perspectiva, el *Tratado de la pintura*, de Leon Battista Alberti, en el que s' explicaven els mètodes per aconseguir representar la realitat. En ella van aparèixer idees que ho van canviar tot i que es van convertir en les noves regles, com les expressades en les famoses frases “el primer requisit per un pintor és conèixer la geometria” i “el quadre és la finestra oberta a través de la que es veu l' objecte pintat”.

L' obsessió d' Alberti era la recerca de regles teòriques i pràctiques per guiar el treball dels artistes, per això les seves obres estan repletes de nombrosos cànons. En *De statuta* exposa les proporcions del cos humà, en *De pictura* realitza la primera definició de la perspectiva científica i en *De re aedificatoria* descriu el seu concepte de l' arquitectura moderna, completament imbuït de la proporció àuria. La part revolucionària de les seves propostes és una constant del coneixement humà: la barreja entre l' antic i el modern, que, en el període renaixentista havia començat ja Filippo Brunelleschi.

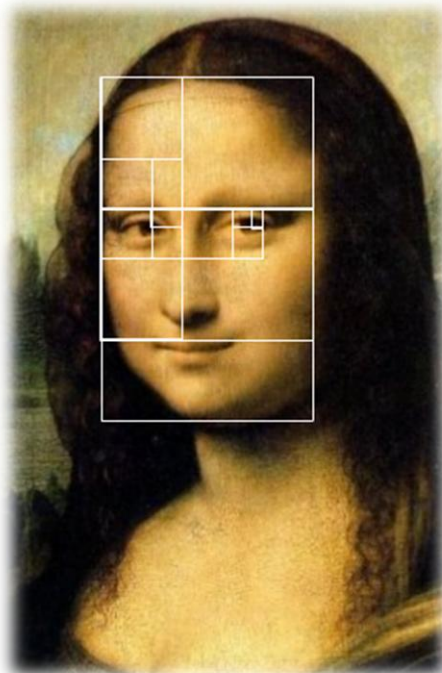
Leonardo Da Vinci va continuar l' estudi de la perspectiva, amb ple auge i desenvolupament formal i teòric en la seva època. El geni va afirmar que “la perspectiva eren les regnes i el timó de la pintura”. La seva influència és clarament identificable amb molts dels artistes que li van succeir, en particular Alberto Durero, qui va estar igualment interessat en la investigació dels fonaments científics de la pintura. Tot i que no es disposa de testimoni directe del ús de la proporció àuria per part de Leonardo, la composició d' obres com *L' últim sopar* es solapa de forma sorprenent amb diverses figures àuries; en especial, el rectangle.

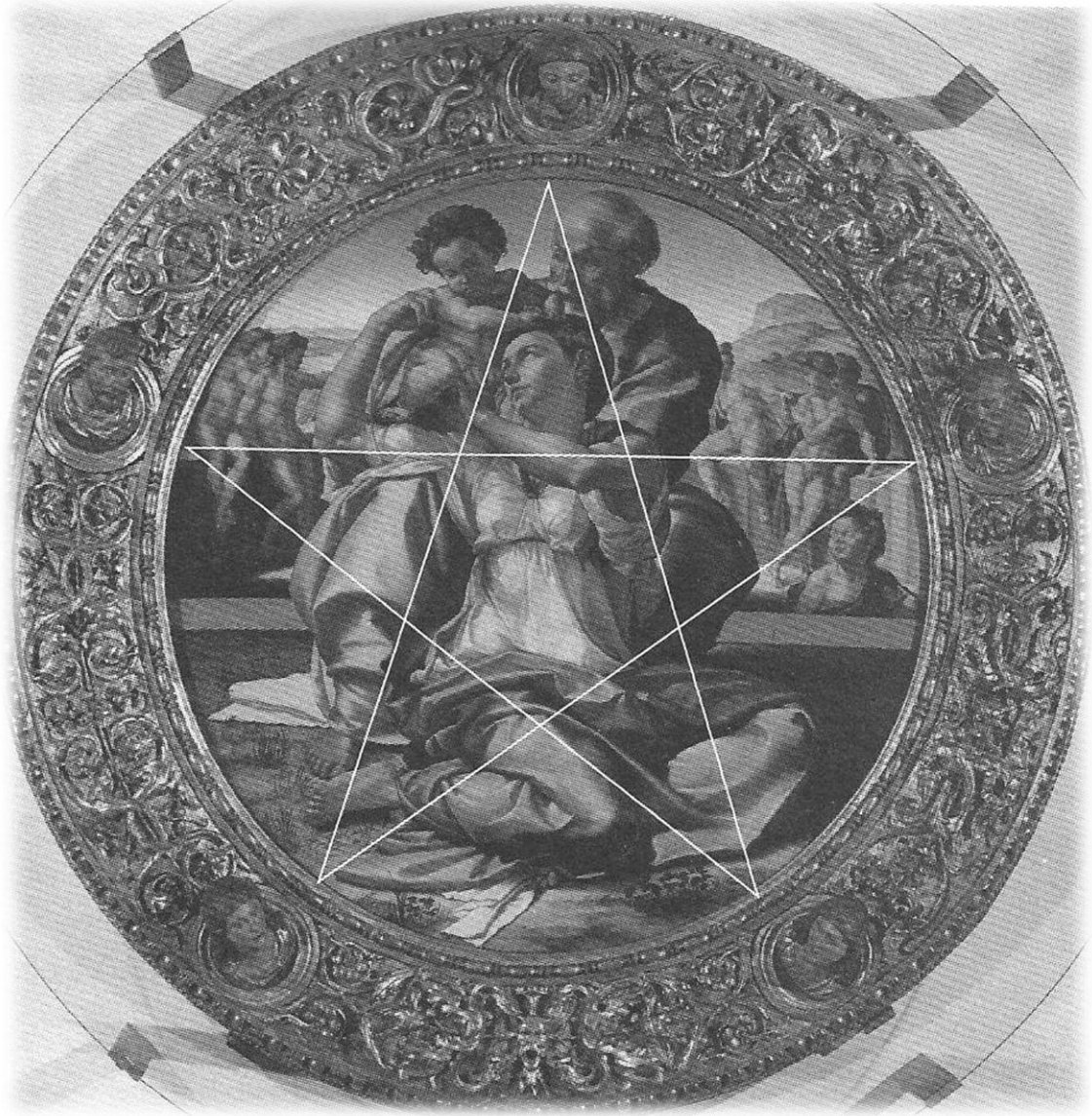
La proporció àuria i la música



En aquesta obra el rectangle auri defineix tant les dimensions de la taula com la disposició al voltant de Crist i els seus deixebles. Amb el coneixement que ja tenim de la proporció àuria, podem constatar a simple vista que també la segueixen les parets de l' estància i les finestres del fons.

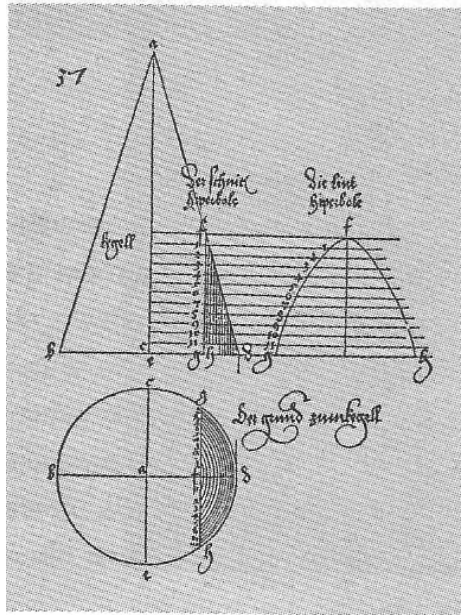
Tampoc el retrat de la *Gioconda* està exempt de la raó àuria. Diversos estudis mostren com el rostre de *Mona Lisa*, tant en el seu conjunt com en els seus detalls, s' emmarca amb precisió en una elegant successió de diferents rectangles auris.



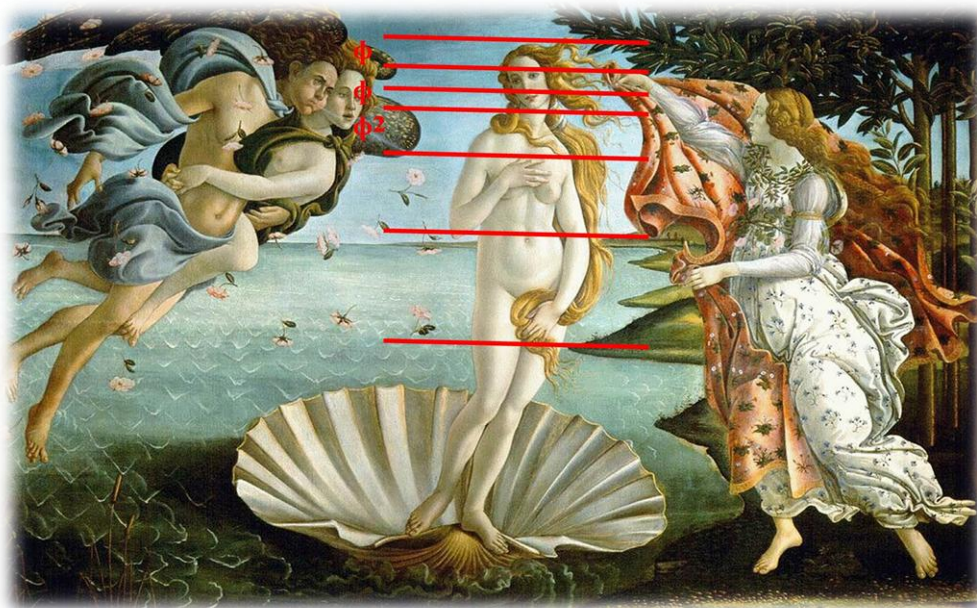


En termes generals, els pintors renaixentistes influïts – tan sols inconscientment – per la proporció àuria només utilitzaren els rectangles auris per les proporcions a tots els nivells de detall. El símbol pentalfa el va servir per la distribució de l' espai, regint sobretot la col·locació dels personatges. Amb el mateix propòsit es va utilitzar també l' espiral auri. Un exemple d' organització a través de l' estrella pentagonal és *La Sagrada Família*, de Miguel Ángel. La presència de Φ en *La flagelación*, de Piero della Francesca, i en *El naixement de Venus*, de Sandro Botticelli, ofereix imatges d' una bellesa escruixidora. Traçar les figures que organitzen aquestes obres és un deliciós desafiament.

La proporció àuria i la música



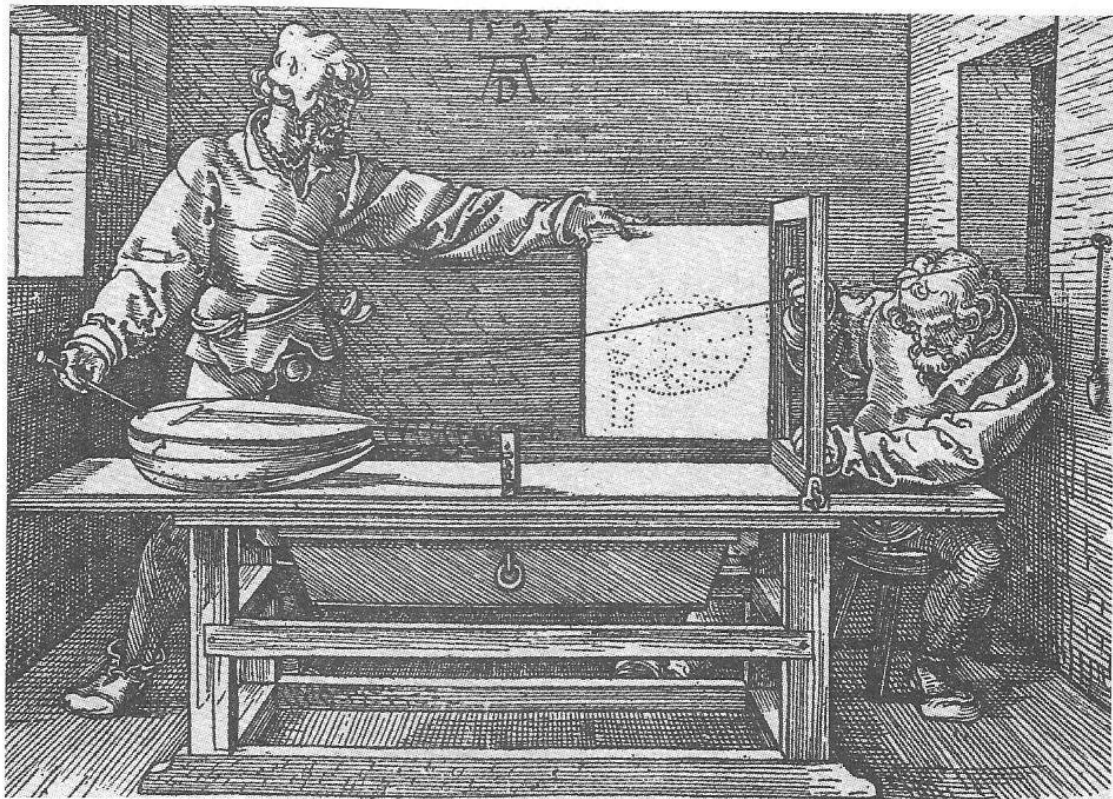
El més destacat continuador de l'estela de Leonardo va ser Alberto Durero. En 1525, Durero va publicar el primer llibre de matemàtiques escrit en alemany: *Instrucción sobre la medida con regla i compás de figuras planas y sólidas*, conegut popularment de manera molt més simple pel títol *De la medida*. El pintor i matemàtic ofereix en ell la seva filosofia de la bellesa en l'harmonia de les proporcions: "La bellesa consisteix en l'harmonia de les parts entre si i amb el tot [...] lo mateix que cada part en si deu ser convenientment dibuixada, també la seva reunió deu crear una harmonia de conjunt, [...] perquè als elements harmoniosos se'ls té per bells".



La proporció àuria i la música

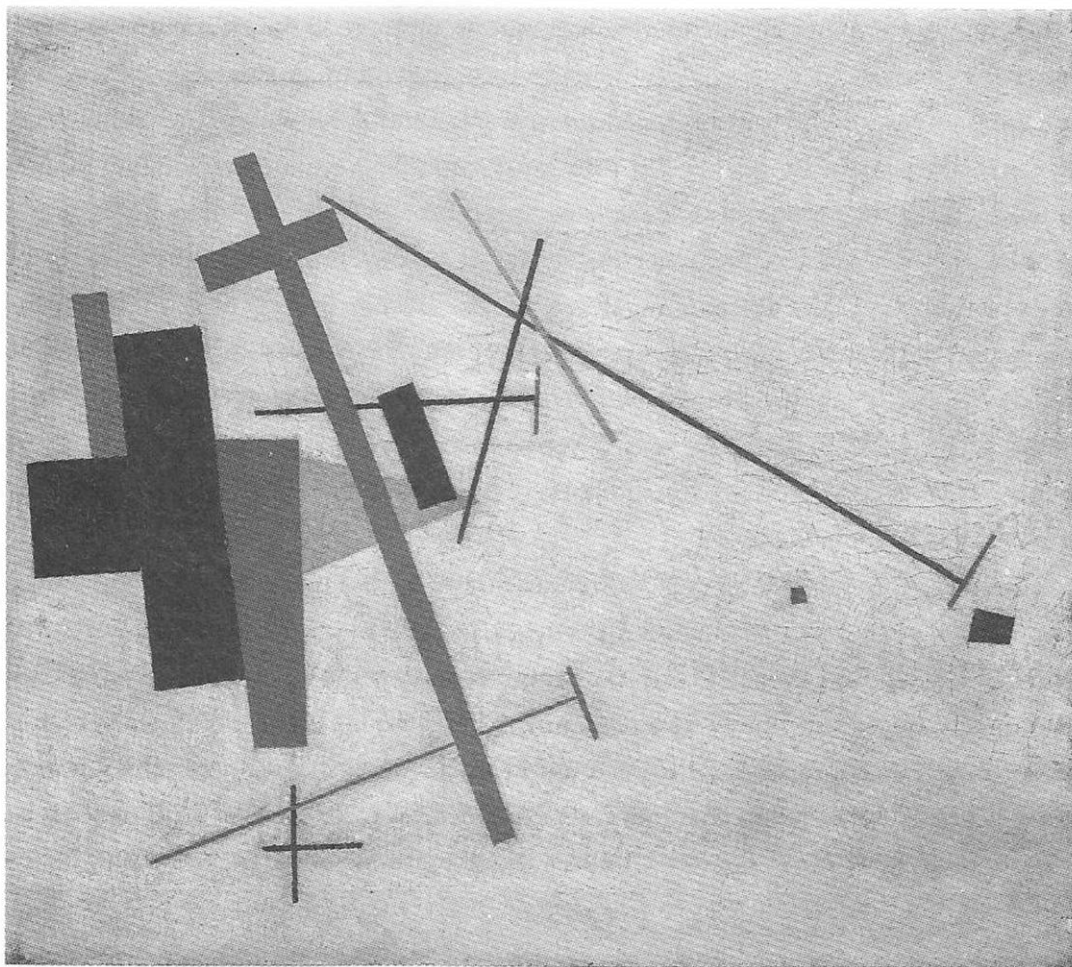
De la medida descriu la construcció d' un gran número de corbes, com la concoide, l' espiral de Arquimedes i l' espiral basada en la secció àuria, també coneguda a partir de llavors com *l' espiral de Durero*. El llibre ofereix mètodes exactes (i altres aproximats) per construir polígons regulars; considera les piràmides, els cilindres i altres cossos sòlids, i estudia els cinc sòlids platònics, així com els sòlids semiregulars d' Arquimedes, Durero tampoc va oblidar la construcció de les seccions còniques, com la paràbola. En conjunt, com veiem, la seva obra es pot considerar com l' inici de la geometria descriptiva.

Finalment, el llibre té una introducció a la teoria de la perspectiva. Durero va fer varis gravats en els que mostrava els aparells necessaris per aplicar-la en dibuixos del natural.



La proporció àuria i la música

en el seu llibre *Ueber das Geistige in der Kunst (De lo espiritual en l' art)* va posar en 1912 les premisses d' un art en el que la imaginació de l' artista es substituiria per la concepció matemàtica". Piet Mondrian va expressar el canvi amb les paraules següents: "El neoplasticisme té les seves arrels en el cubisme. També se li pot anomenar pintura abstracte - real, perquè lo abstracte (com les ciències matemàtiques però sense assolir com elles lo absolut) pot ser expressat per una realitat plàstica en la pintura. Aquesta és una composició de plànols rectangulars acolorits que expressa la realitat més profunda, que arriba a través de la expressió plàstica de les relacions i no a través de l' aparença natural... La nova plàstica planteja els seus problemes en equilibri estètic i expressa d' aquest mode la nova harmonia".



Composició suprematista, realitzada en 1915 per Kasimir Malevich. Los pintores abstractos también partían de la geometría para sus composiciones y en ellas la proporción áurea volvía a aparecer.

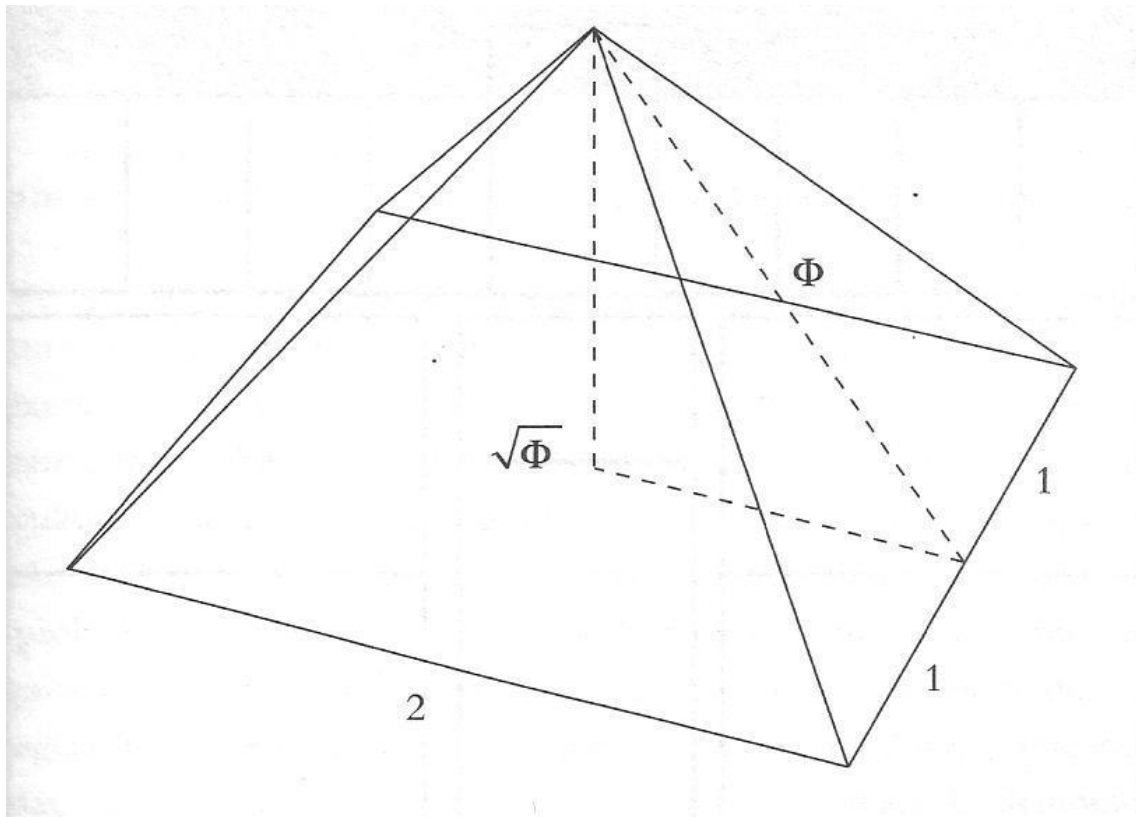
La proporció àuria i la música

Max Bill va definir aquesta nova manera d'entendre l'art: "La concepció matemàtica de l'art no és la matemàtica en el sentit estricte del terme, inclòs es podria dir que seria difícil per aquest mètode d'utilitzar lo que s'entén per matemàtica exacta. Es més bé una configuració de ritmes i relacions, de lleis que tenen un origen individual, del mateix mode que la matemàtica té els seus elements innovadors originaris en el pensament dels seus innovadors".

Molts artistes destacats del segle XX tenen un fort sabor matemàtic; moltes obres fonamentals tenen una concepció matemàtica o utilitzen les matemàtiques com a font d'inspiració. No només destaca l'omnipresent Escher, potser el més popular, sinó moviments sencers, com el suprematisme o el cubisme. El subcorrent d'aquest últim anomenat Secció Àuria es basava en la idea de la recerca de formes universals. La *Secció Àuria* del cubisme va estar liderada per Marcel Duchampe, i en ella participaren nombres tan il·lustres com Le Corbusier, Juan Gris i Fernand Léger.

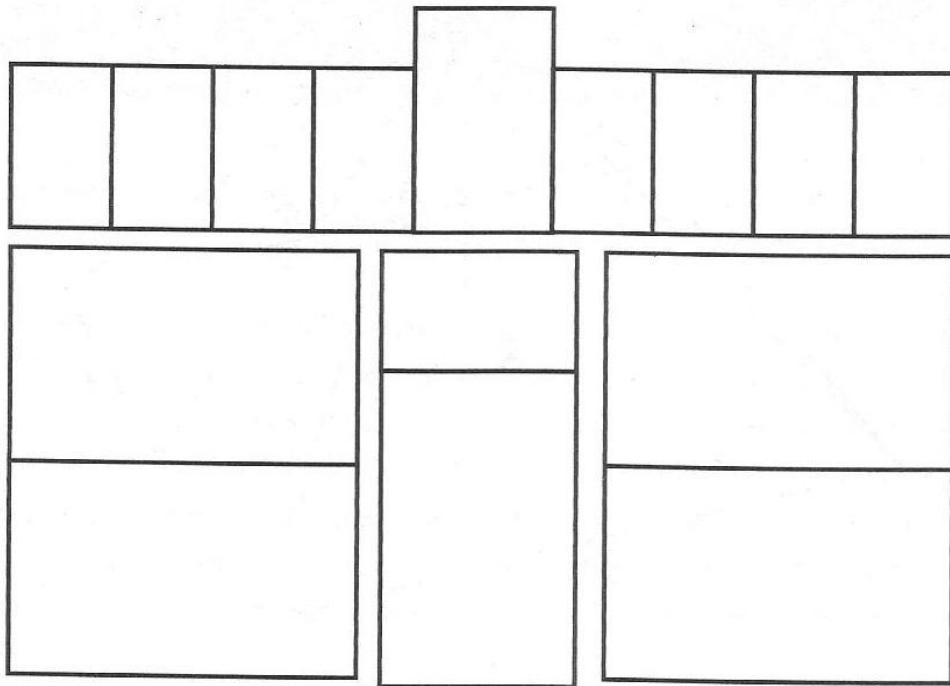
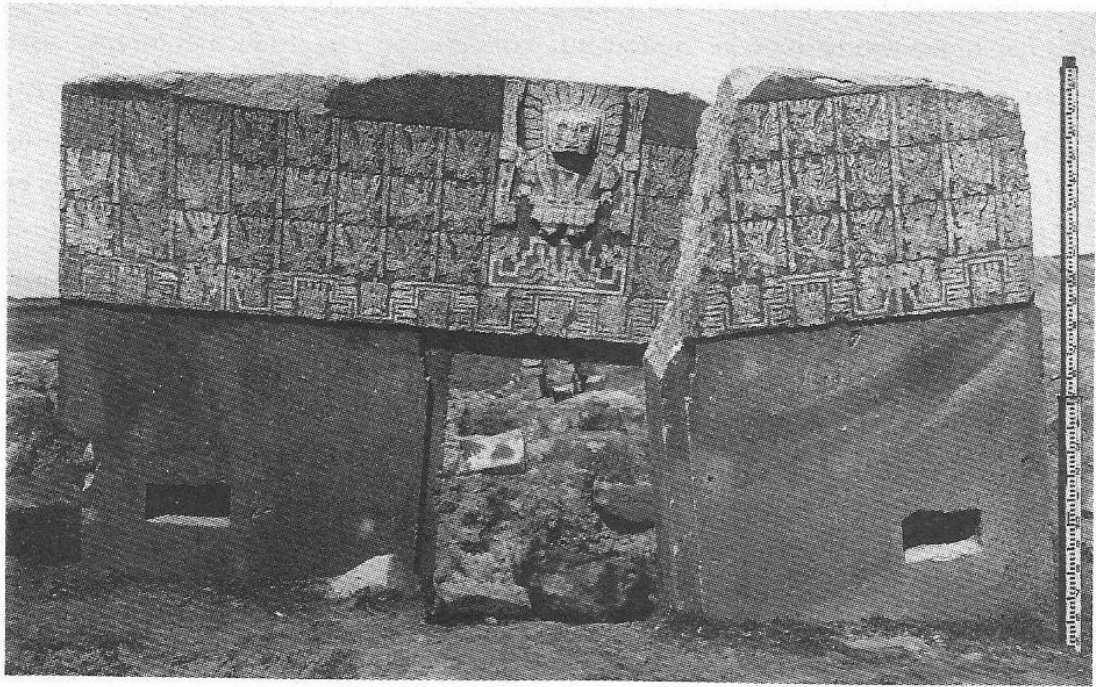
2.3. La proporció àuria en l'arquitectura

La proporció àuria s' intueix en construccions humanes des dels antics egipcis, tot i que rarament pot assegurar-se que això obeeiria a una preferència deliberada. L' altura i la base de la gran piràmide de Keops, per exemple guarden entre si una íntima correspondència amb Φ .

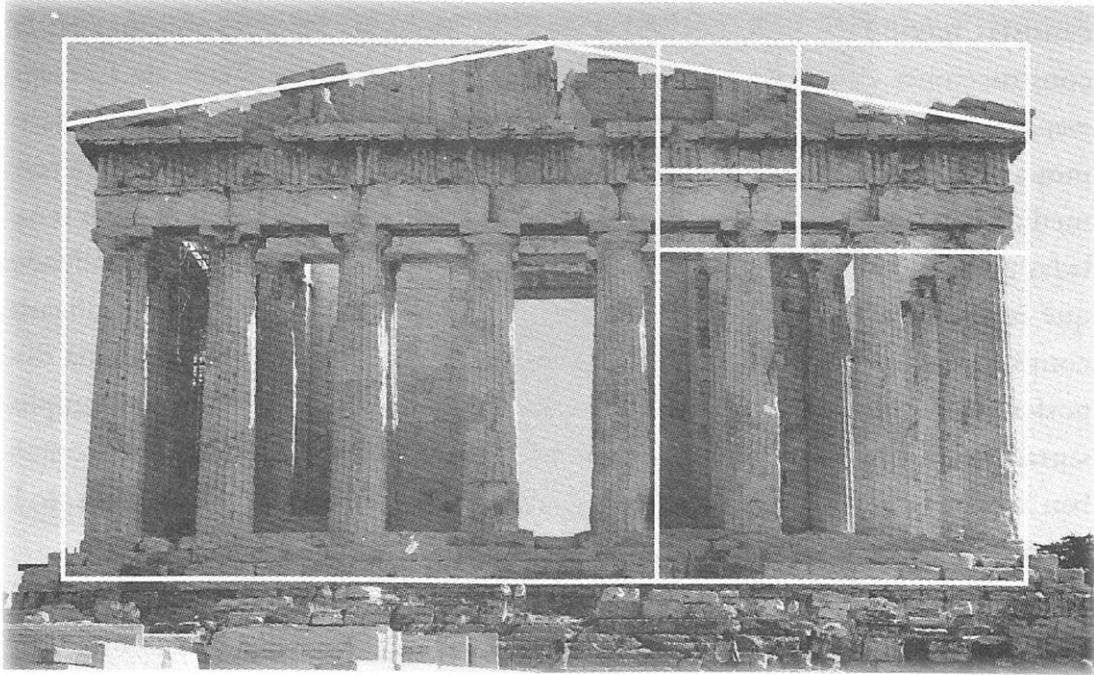


Els arcs de triomfs de la Roma clàssica ressegueixen la proporció àuria, com també ho fan les tombes milícies i les esglésies de la antiga ciutat de Mira (l' actual Demre turca). Altres civilitzacions molt allunyades de la cultura clàssica semblen coincidir en l' estima per la raó d' or. No molt lluny del llac Titicaca, juntament amb la capital de Bolívia, La Paz, es troba la Puerta del Sol de Tiwanaku, monument regit completament per Φ .

La proporció àuria i la música



Sempre s' ha considerat que, de totes les construccions de l' Antiguitat, l' exemple més representatiu d' ús clàssic de la proporció àuria en l' arquitectura ha sigut el Partenó. No en va, el nom modern de la secció àuria, *phi*, és la inicial del constructor d' aquest monument, Fidias. Però, avui en dia aquest punt és objecte de discussió.



Certament, la mitja i extrema raó va tenir la seva major valedora occidental en la cultura grega, però un presa de mesures sobre el terreny dóna una quantitat de inexactituds tant sorprenents que han acabat per aixecar-se les sospites en una part considerable de la comunitat d'experts. És possible que en la història de la cultura occidental hagi hagut un intent de trobar la relació àuria en el disseny del Partenó més que un ús conscient per part dels seus constructors? És el problema de la interpretació quan les dades són el convenientment ambigües; una qüestió que ha donat molt treball a totes les civilitzacions. Sempre es poden contar 666 passos, escales, polsades, entre dos punts qualsevol per justificar la pujada del dimoni des dels inferns o la baixada del profeta des dels cels. D'igual manera, prenen les mesures adequades en qualsevol monument, sempre es pot trobar Φ com a quocient, tot i que l'arquitecte no hi pensés en ella en la seva construcció.

Sens dubte, podem certificar com a ús conscients les manifestacions de la divina proporció en l'Edat Mitjana, perquè sovint estan documentades. El pentàgon regular o el pentàgon estrellat apareixen com a recursos de construcció durant tot aquest període. Les espectaculars rosasses de les catedrals gòtiques són clàssics exemples d'ell.

Amb l'edició traduïda de Vitruvi, els teòrics de l'arquitectura renaixentistes reivindicaren la necessitat de l'harmonia de les proporcions en les construccions darrere de la bellesa. En l'apartat corresponent de *La divina proporció*, Luca Pacioli posa l'home com a centre de totes les cosses: "Parlarem abans de la proporció

La proporció àuria i la música

humana referent al seu cos i membre, doncs tota mesura amb les seves denominacions es deriva del cos humà i en ell estan senyalades per el dit del Altíssim tota sort de proporcions i proporcionalitats que revelen els més intrínsec secrets de la naturalesa”, per després utilitzar-ho com a mesura del món: “I per això els antics, considerant la deguda disposició del cos humà, conformaven totes les seves obres, sobretot els temples sagrats, d’ acord amb la proporció d’ aquest cos, doncs en aquell trobaven les dues figures principals sense les quals no era possible fer res, és a dir, la circular... i el quadrat”.

En el llibre *De re eadificatoria*, el polifacètic Leon Battista Alberti (1404-1472) afirma que la bellesa consisteix en l’harmonia de les parts entre si i amb el tot. Diu Alberti que la bellesa “és el valor absolut de un organisme estètic, que irradia en l’ànima humana una alegria interior, suscitant un acord irreemplaçable entre l’home i l’univers mitjançant el càlcul matemàtic, el joc de les proporcions, o en termes presos del *Timeo* de Plató, de les mitjanes pitagòriques”.

L’estreta relació entre proporció i harmonia en l’àmbit de la música relacionen aquesta cerca de la concordança entre els elements d’una construcció. La idea va partir potser de la reflexió de Andrea Palladio (1508-1580), l’arquitecte venecià del manierisme, que tanta influència tindria en el neoclassicisme. En la seva obra *Cuatro libros de arquitectura* va considerar que les proporcions de les veus eren harmonies per les orelles, mentre que les de les dimensions eren harmonies per als ulls: “Aquestes harmonies solen complaure considerablement, sense que ningú excepte aquells que estudien les causes de les coses sàpiga per què”.

No només la Itàlia del Renaixement va practicar l’ús de la raó àuria en el disseny dels seus edificis monumentals. La Universitat de Salamanca és la més antiga d’Espanya (data del 1218) i la primera d’Europa que va tenir el títol d’universitat. La façana va ser reconstruïda en el segle XV seguint l’estil plateresc, una fusió de mudèjar i gòtic flamíger exclusiu del Renaixement espanyol. La relació d’or precedeix les seves proporcions.

Arquitectura contemporània

Els avenços en les tècniques de construcció i el desenvolupament de nous materials van fer esclatar els límits per a la imaginació dels arquitectes del segle XX. El nord-americà Frank Lloyd Wright (1867-1959) va ser un dels representants de l'arquitectura orgànica. Poc abans de morir, com elegant cant dels signes i llegat impagable per a la posteritat, va dissenyar la gran rampa d' accés al Museu Guggenheim de Nova York seguint una forma molt agosarada: l'estructura del nàutil, és a dir, d'una espiral.



També l'arquitecte polonès Zvi Hecker (1931) va utilitzar dissenys en espiral en les escoles Heinz-Galinsky de Berlín, construïdes en dates tant recents com 1995. Hecker va partir del concepte d'un gira-sol, amb un cercle en el centre al voltant del que roten tots els elements arquitectònics.

L'edifici és una combinació d'una retícula octogonal i una concèntrica, intentant respectar la simbiosi entre la rigidesa del pensament humà i el caos controlat del natural. Imita a la planta, que segueix l'òrbita del sol, perquè els seus raigs il·luminen totes les classes al llarg del dia.



La proporció àuria i la música

El Quincy Park, situat en la ciutat de Cambridge, en Massachusetts (Estats Units), està replet de referències a l'espiral àuria. Va ser dissenyat en 1997 per l'artista David Phillips i es troba molt a prop del Clay Math Institute (CMI). El CMI és el centre d'investigació matemàtic cèlebre, entre altres coses, pot oferir des de l'any 2000 un miler de dòlars per la resolució de cada un dels set problemes del mil·lenni, escollits pels més importants pensadors dins del camp de la investigació matemàtica. En el Quincy Park es pot passejar entre estàtues amb l'espiral àuria i corbes de metall, relleus de dos conxes i una pedra amb una arrel quadrada. Una placa d'informació sobre la raó àuria, i inclòs l'aparcament de bicicletes, utilitza el símbol de Φ .

Le Corbusier

El trencador i radicalment modern Le Corbusier va voler estrènyer la mà de Luca Pacioli al llarg dels segles quan va dir d'ell que també havia buscat en el passat. En els temps del sistema mètric, Le Corbusier va aspirar a fer la seva pròpia aportació a l'exuberant història del número d'or. Es va queixar de que el sistema mètric havia despersonalitzat els instruments de mesura i, per tant, s'havia perdut l'escala humana. Per recuperar-la, va inventar la seva pròpia escala, basada en la proporció àuria, però passada per el tamís dels temps moderns. Com resposta a l'home de Vitruvio, va idear l'*home de modulator*: "El metre, el centímetre, el decímetre no són de l'escala humana, el *modulator*, sí. Vaig prendre les proporcions des del plexe solar fins al cap i al braç i vaig trobar la secció d'or allí, i vaig crear un sistema de dimensionament que va respondre a les dimensions del cos humà. El vaig descobrir donant-me conte. No soc pretensions, però és important i obre a la indústria enormes possibilitats; és inútil i modern..., és una innovació sensacional".



La proporció àuria i la música

Matila Ghyka va recollir la aportació de Le Corbusier en el volum segon del seu llibre *El numero d'or* en el que explicava que el rectangle auri “ha entrat triomfalment en l'arquitectura a través dels plànols recents del més cèlebre apòstol i representant de les noves tendències”. A continuació va descriure els plànols de l'arquitecte per al *Mundaneum* de Ginebra. Le Corbusier va explicar que havia concebut el *Mundaneum* com una ciutat rectangular, on la raó entre la longitud i la profunditat del rectangle és donada per Φ .” La secció àuria defineix amb dos eixos [de creixement], així com els costats del recinte general [...] El ritme està ordenat d'acord amb la secció àuria, mesura que ha determinat l'harmonia de tantes obres de tots els temps”.

Els anys de la Segona Guerra Mundial van detenir la construcció i es basaren lamentablement en la feina oposada. Le Corbusier va dedicar aquests temps a la teoria. Entre 1942 i 1948 va desenvolupar el *modulor*, un sistema de mesures per a l'edificació i el disseny de mobiliari domèstic basat en la proporció àuria i en les mesures d'un cos del prototip saxó (1,82 metres d'estatura). El llibre *El modulor* es va publicar en 1950 i va ser un èxit immediat. Va continuar en 1955: *El modulor 2*, que adaptava les mesures del prototip llatí (1,72 metres d'estatura).

El sistema del *modulor* reprenia l'ideal clàssic que pretenia relacionar de manera directa les proporcions dels edificis amb les de l'home.

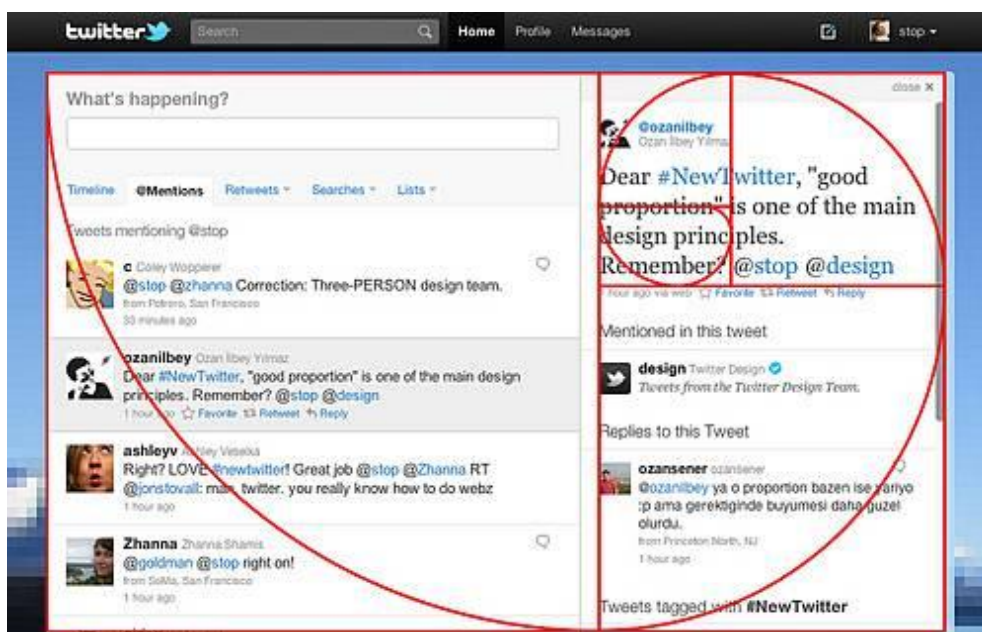


2.4. La proporció àuria en el disseny

La cal·ligrafia va començar amb l' utilització de la impremta, i, com no, en el disseny dels tipus d'impremta van intervenir vells coneguts de la nostra petita història, com Luca Pacioli, Leonardo Da Vinci o Durero. En aquesta tasca van aplicar els mateixos principis de proporcionalitat que regia la resta de les seves activitats. Al realitzar el *Libro de plegarias* de l'emperador Maximiliano I, Durero va utilitzar la proporció àuria tant en el text com en les decoracions laterals.

Sens dubte, des d'abans de Guttenberg el format dels llibres contemplava una aproximació a la raó d'or. La proporció que es considerava més harmoniosa per als llibres és 1:1,6 (també expressable com 5:8), però es solia reservar per a les edicions de luxe, doncs aprofita menys el paper. El format més habitual és el que es denomina *proporció normalitzada*, que és 1:1,4 (també expressable com 5:7).

Tot i que actualment a les generacions digitals tot això els pugui semblar batalles d'altres temps, no es deu caure en la desmemòria. Encara avui en dia s'utilitza Φ per al disseny de pàgines web. A més, el més important icona del disseny actual, el reproductor d'arxius MP3 de la marca més famosa, que la meitat de la humanitat va escoltant pel carrer, té les dimensions d'un rectangle auri.



També són rectangles auris les capsetes de tabac, des de que una coneguda marca va imposar aquest disseny en 1955 en una campanya de canvi d'imatge. En el fons, el motiu era menys estètic que pràctic. Les actuals capsetes es construeixen amb una enginyosa forma de plegat, que a més permet fer-li una tapa. Per això aquest

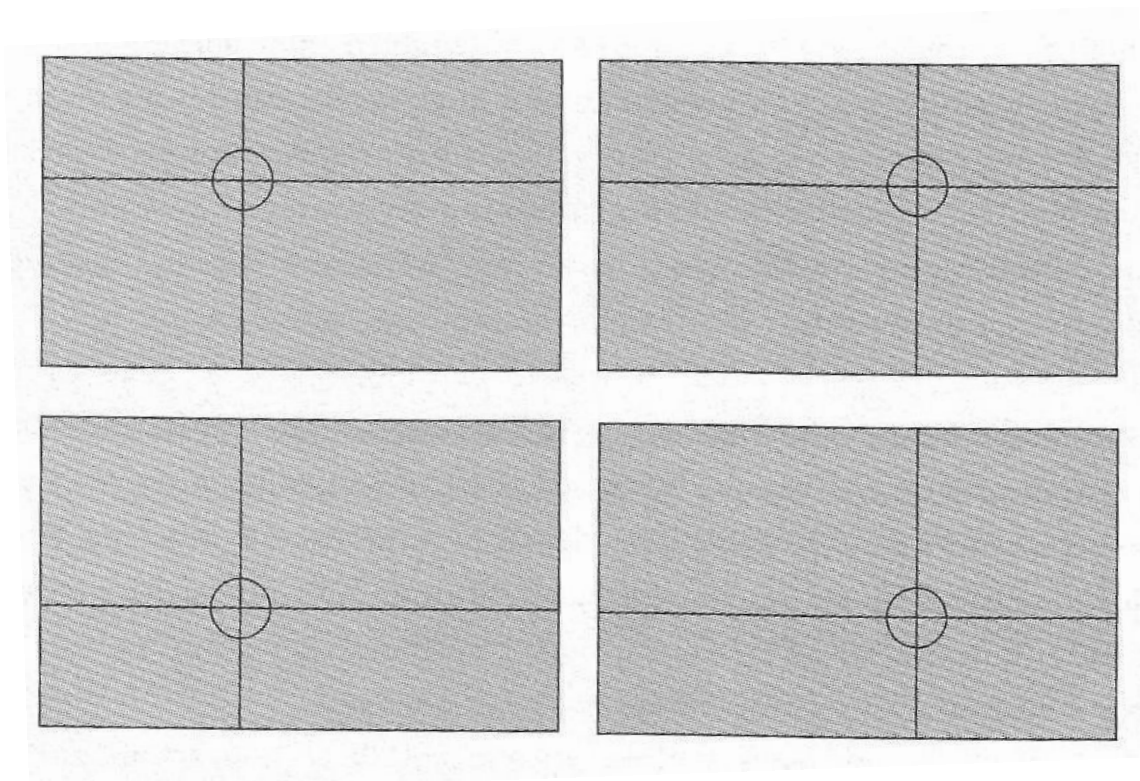
La proporció àuria i la música

disseny s'anomena *flip-top box*. El rectangle més gran de la capsa ortoédrica resultant té unes dimensions de 8,5 X 5 cm, el quocient del qual és Φ . El seu gran èxit el va generalitzar i va ser copiat en tot el món per totes les marques.

En el disseny de roba hi ha peculiars utilitzacions de la proporció àuria. Una empresa nord-americana va dissenyar els seus texans amb Φ apareixent en la corba de la butxaca davantera, en les proporcions de la butxaca posterior, en la relació entre el repunt del maluc i la costura interior del pantalons.

Una altra manifestació de la seva omnipresència fa saltar la proporció àuria al terreny de joc. Els camps de futbol són rectangles amb un mòdul aproximat de 1,52 en la seva immensa majoria. Però altres no ho són, i un exemple destacat és el del Reial Madrid Club de Futbol. El seu camp és un rectangle pràcticament auri, de mòdul 1,606 (les mesures són 106 X 66 metres).

Encara que no solen declarar ser conscients, molts dibuixants d'histories també utilitzen Φ en els seus dibuixos. Si apliquem Φ en una vinyeta que sigui un rectangle 5 X 3 cm, tindrem 5 cm : 1,618 = 3,09 cm i 3 cm : 1,618 = 1,85 cm. Així doncs, es poden posar aquests resultats al rectangle de quatre formes diferents.



Es pot comprovar l'ús de aquesta divisió en els treballs de molts dibuixants, al igual que l'utilització de divisions pures de la vinyeta en una proporció àuria exacta.

3. El nombre d' or i la naturalesa

Imagina una forma molt senzilla, un rectangle, per exemple. Com pot créixer sense perdre la seva forma? El sentit comú ens indica que hauria de créixer de manera uniforme, és a dir, en la mateixa proporció en totes direccions; com si pels costats fossin elàstics i s'anessin estirant poc a poc, amb cura. Tot i que sembli el més lògic, si mesuréssim el creixement segons aquest mètode, veuríem que la forma del rectangle (la relació entre les longituds dels dos costats) no es manté constant, amb el que perdria la seva forma.

3.1. Créixer conservant la forma

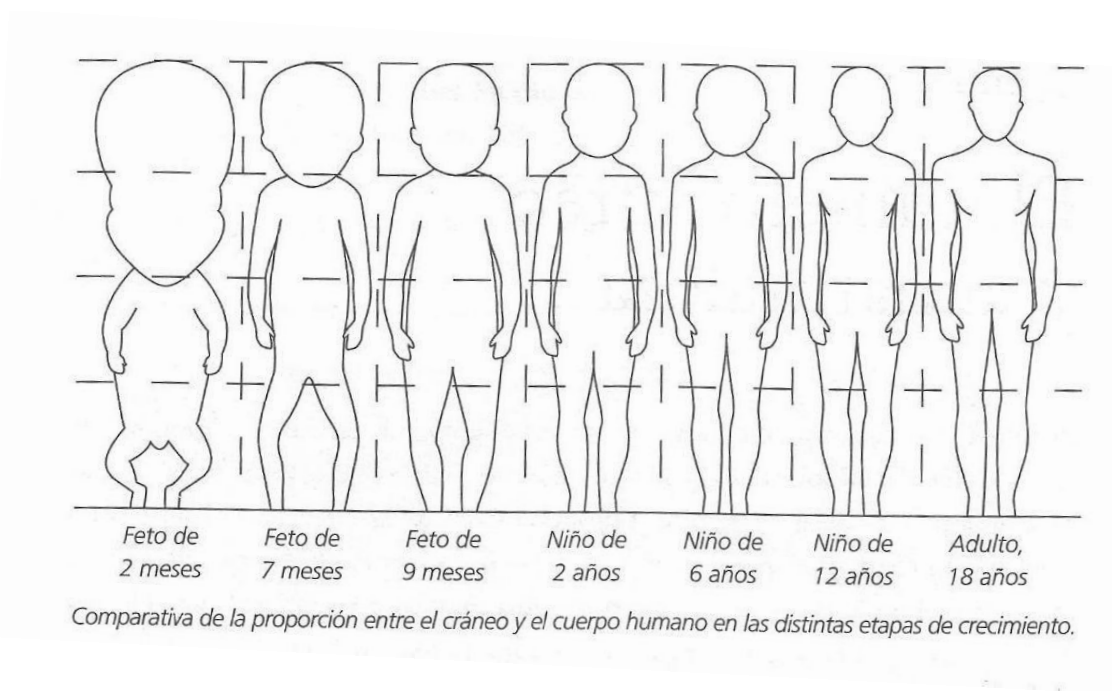
Per entendre el que significa exactament “conservar la forma”, pensem un moment en l' ésser humà. Es conserven les seves proporcions? Tot el contrari, diríem que el seu desenvolupament és un constant canvi de proporcions. Tot i que sempre protestem per això, és una sort que ens transformem amb l'edat, per què si conservéssim la forma que tenim al néixer tindríem greus problemes per mantenir el cap dret.

Per una altra banda, vam veure també l'espiral àuria, la diferència fonamental de la qual amb altres espirals es que es va eixamplant a mesura que gira. El biòleg escocès D' Arcy Thomson (1860-1948), anomenat “El primer biomatemàtic”, va identificar que la propietat d'alguns éssers vius d'augmentar per creixement terminals sense la modificació de la forma total és característica de l'espiral logarítmica i de cap altre corba matemàtica” Tota corba plana que parteix d'un pol fixe i de tal naturalesa que l'àrea polar d'un sector sigui sempre un gnòmon respecte de l' àrea precedentment obtinguda, és una espiral logarítmica”.

Els insectes tracen una espiral àuria quan s'apropen a un punt de llum. Si en lloc d'allunyar-se d'un punt determinat, volem apropar-nos a ell conservant l'angle de gir, només podrem fer-ho així. Les aus depredadores mantenen aquesta trajectòria quan és llancen a caçar. Es l'única manera en que poden aguantar el cap recte i sense variar de posició, així que sempre tenen un control visual sobre la presa i maximitzen la velocitat.

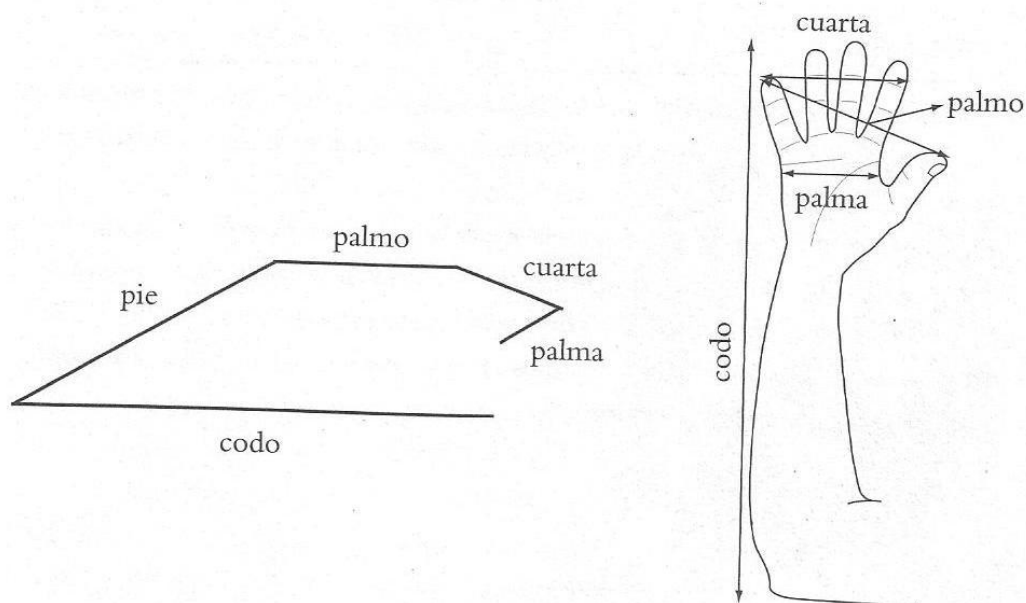
3.2. La proporció àuria en els éssers vius

L'home ideal de Leonardo va suposar una primera reflexió sobre la presència de Φ en el món animal. A partir de llavors, la història de l'art i de la ciència ha vist nombrosos estudis sobre l'adequació de diferents parts del cos humà a la proporció àuria. Però ja en l'Edat Mitjana la mesura humana s'utilitzava com a patró. Els constructors de catedrals franceses utilitzaven un instrument de mesura consistent en cinc fils articulats amb les longituds de la palma, la quarta, el pam, el peu i el colze, que corresponien a les magnituds del braç humà, a més de la longitud del peu.



Totes aquestes longituds eren múltiples d'una unitat anomenada *línia*, que equivalia a poc menys de 2,5 mm (amb més exactitud 2,247). La següent taula mostra la equivalència d'aquestes mesures amb la línia i amb les nostres unitats actuals. Es pot comprovar que les línies són termes successius de Fibonacci; per tant, la raó de cada un respecte l'anterior serà Φ , el que no deixa de ser sorprenent, doncs les mesures inicials van ser preses en el cos humà.

La proporció àuria i la música



palma	34 línies	7,64 cm
cuarta	55 línies	12,63 cm
palmo	89 línies	20 cm
pie	144 línies	32,36 cm
codo	233 línies	52,36 cm

La fil·lotaxis i la proporció àuria

La *fil·lotaxis* és una paraula d'origen grec, composta per *phyllon*, que significa "fulla", i *taxis*, que vol dir "ordre", amb el que es defineix la disciplina de la botànica que estudia la disposició de les fulles sobre el tall, la qual, com veurem, segueix pautes geomètriques i numèriques. Aquesta disciplina permet descobrir algunes de les manifestacions naturals més sorprenents per la intel·ligència del seu disseny, sovint expressable amb termes matemàtics increïblement precisos.

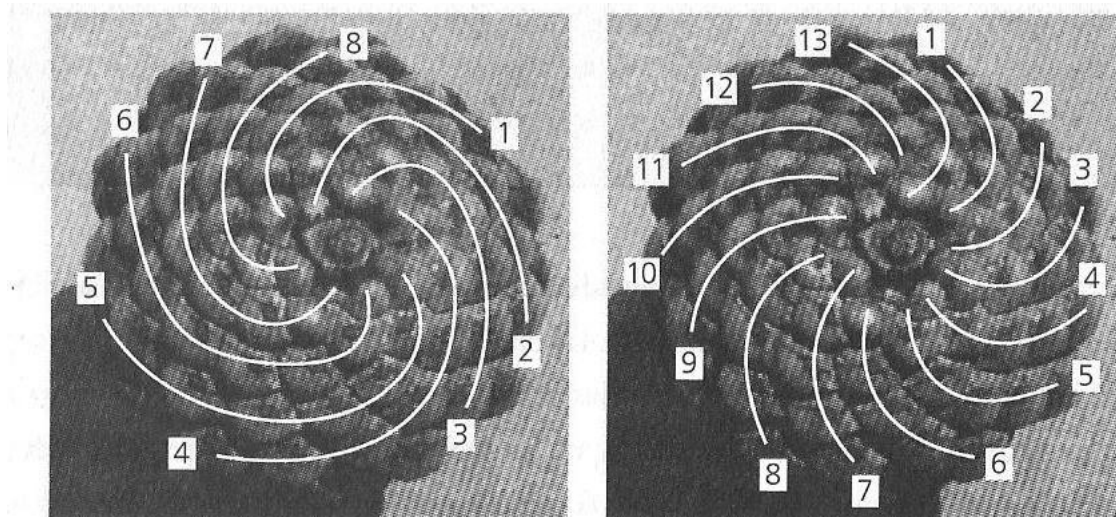
Per començar, es pot observar a simple vista en qualsevol planta que les fulles no creixen mai una damunt de l'altra. Si ho fessin, s'ocultarien unes a unes altres al sol que necessiten, així com la pluja o l'oxigen. A priori sembla simplement lògic, però si ho pensem un moment es diria que revela una sort de consciència. El més sorprenent, un anàlisi més específic de la disposició de les fulles en la planta va revelar sempre un patró, és a dir, una organització.

La proporció àuria i la música

Els pensadors de la Grècia clàssica ja van advertir d'algunes d'aquestes propietats, però seria Leonardo el primer en desentranyar les claus de la disposició. El geni va adonar-se de que les fulles es col·locaven seguint espirals al llarg del tall en grups de cinc, el que indica que l'angle de gir de les fulles té a veure amb múltiples de $1/5$. Una mica més tard, Kepler va observar que el pentàgon tenia una presència important en les flors, que sovint tenen cinc pètals, o les fruites, les llavors de les quals sovint es distribueixen un pentàgon estrellat, com la poma.

La fil·lotaxis i les matemàtiques van començar a aproximar-se en el segle XIX, de mans del naturalista alemany Karl Schimper (1803-1867) i el cristal·lògraf francès Auguste Bravais (1811-1863). Ambdós van advertir la presència de números consecutius de la successió de Fibonacci en les pinyes. En els seus estudis van desenvolupar la regla general dels factors de la fil·lotaxis, que podien ser expressats com quocients dels números de Fibonacci.

A partir de llavors, la successió de Fibonacci i la botànica van quedar unides. En 1968 el matemàtic nord-americà Alfred Brossseau va fer un estudi amb 4290 pinyes de deu espècies diferents de pins de Califòrnia i va poder comprovar que, amb la insignificant excepció de 74, totes les altres seguien la successió de Fibonacci, el que suposa una coincidència del 98,3%. Com sol passar, passat el temps suficient, la comunitat científica va tenir un altre atac d'escepticisme i va repetir l'estudi en 1992. El botànic canadenc Roger V. Jean va ampliar l'estudi a 12750 observacions de 650 espècies diferents. La successió de Fibonacci apareix en el 92% dels casos.



Les fulles de la majoria de les plantes de tall alt parteixen d'aquest últim seguint un espiral, i compleixen la llei de divergència, que estableix que, per cada espècie de planta, l'angle que formen dos fulles consecutives es constant i s'anomena *angle de*

La proporció àuria i la música

divergència . Aquest angle s'expressa en graus, com una fracció en la que el numerador és el número de voltes al voltant del tall des de una fulla a la següent, i el denominador, el número de fulles que es troba en aquest recorregut.

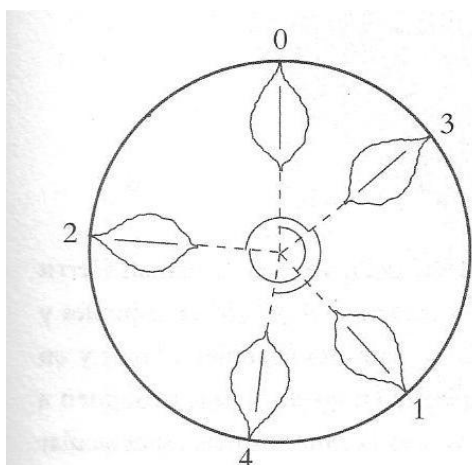
La sèrie de Schimper-Braun , formada per els quocients entre un dels termes de Fibonacci i el de dos llocs més endavant: a_n/a_{n+2} , ens dona una classificació de moltes espècies segons el seu angle de divergència. Si recordem que el quocient entre dos termes consecutius, a_{n+1}/a_n , tendeix a Φ , tindrem que la sèrie anterior tindrà a $1/\Phi^2$. El raonament matemàtic seria més o menys així:

$$\frac{a_n}{a_{n+2}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{1}{\Phi} = \frac{1}{\Phi^2}$$

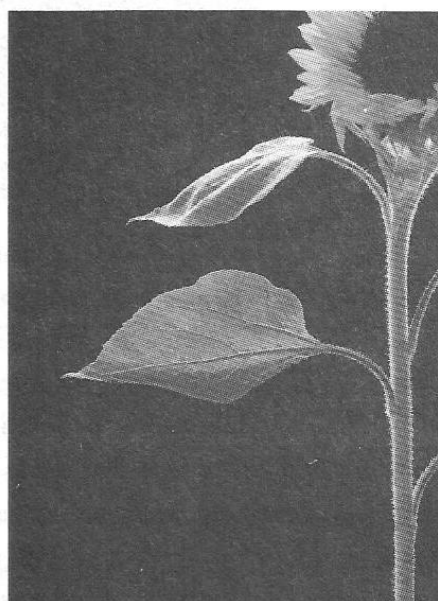
La pregunta realment difícil de contestar es: Com “saben” les plantes com han de posicionar les seves fulles seguint el model de la successió de Fibonacci? Doncs bé, el creixement es fa en la punta del tall, que té forma cònica. Les fulles que creixen primer i estan més a baix tendeixen a estar allunyades del tall de forma radial quan es veu la planta des de d'alt, perquè allí el tall és més gruixut. Bravais va descobrir que les noves fulles avancen rotant el mateix angle, aproximadament $137,5^\circ$. Si calculem

$$360^\circ \cdot \frac{1}{\Phi^2} = \frac{360^\circ}{\Phi^2}$$

(els 360° que corresponen a una volta completa per el límit al que convergeix la successió anterior), s'obté justament $137,5^\circ$, que a vegades s'anomena *angle auri* .



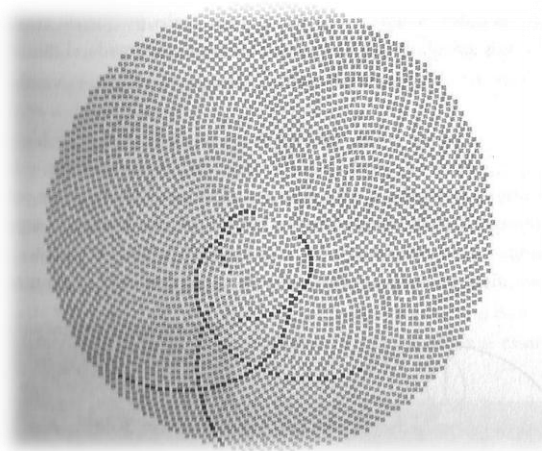
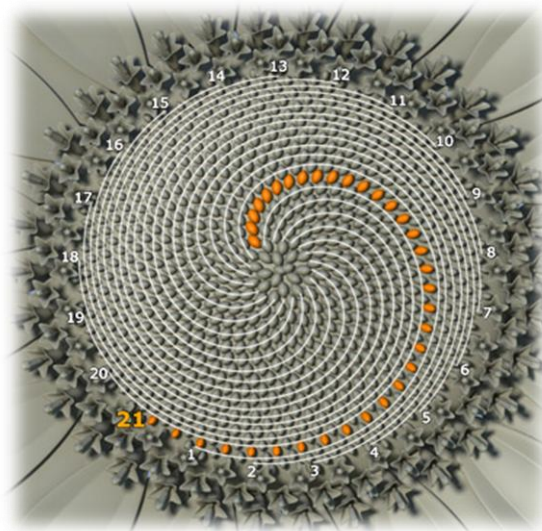
Las hojas adyacentes del tallo de un girasol se disponen con una distancia angular de aproximadamente $137,5^\circ$ entre sí, es decir, cada una rota $137,5^\circ$ con respecto a la anterior.



La proporció àuria i la música

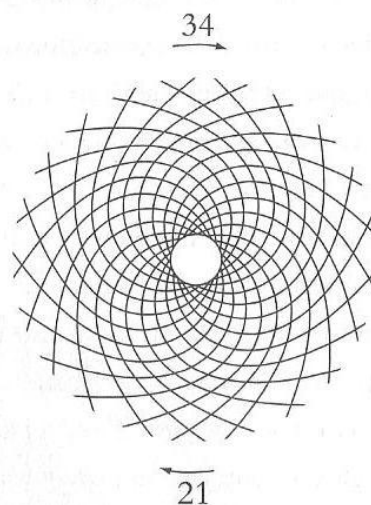
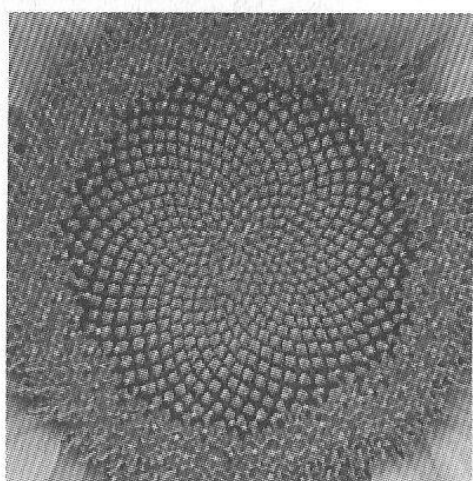
Treballant en sentit invers, des de les matemàtiques fins la botànica, un equip de científics liderat per N. Rivier va descobrir en 1984 que, utilitzant un algorisme matemàtic amb un angle de creixement igual a l'angle auri, s'obtenen estructures similars a gira-sols reals. La seva conclusió va ser interessant: Són els propis requeriments d'homogeneïtat i autosimilitud els que limiten de manera dràstica les estructures possibles, el que podria explicar la freqüent aparició dels números de Fibonacci i de la raó àuria en la fil·lotaxis. Altres experiments amb camps magnètics també mostren configuracions amb espirals àuries.

En aquesta repartició de llavors virtuals generada per ordinador, s'observa amb claredat l'emergència d'un gran nombre d'espirals de diferent curvatura. El número d'espirals de longituds similar en un i un altre sentit solen ser termes successius de la successió de Fibonacci.



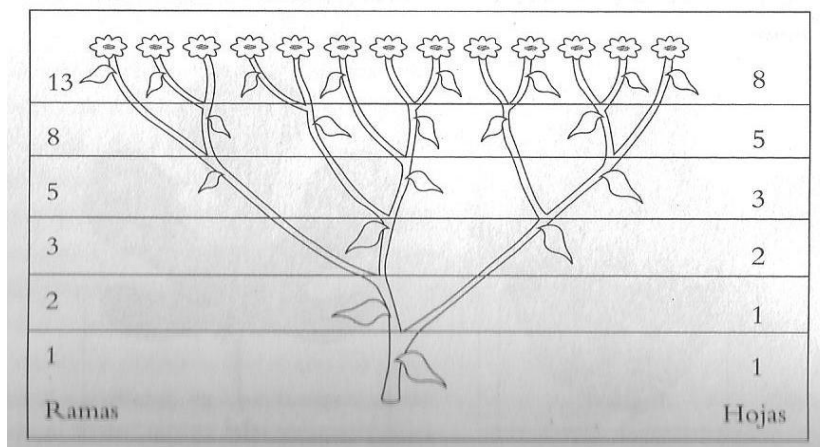
La proporció àuria i la música

Així es va corroborar el clàssic experiment de 1907 del matemàtic alemany Gerrit van Iterson, qui va afegir uns successius separats per $137,5^\circ$ en espirals i va mostrar que l'ull humà observa una família de patrons espirals a favor i en contra de les agulles del rellotge. El número d'espirals en les dues famílies tendeixen a ser números de Fibonacci consecutius. El gira-sol és la mostra més espectacular i millor coneguda d'aquest fenomen. Quan es mira un gira-sol, es veuen espirals a favor i en contra a les agulles del rellotge, formades per les llavors (les pipes de gira-sol); les quantitats de cada una de elles són també termes consecutius de la successió de Fibonacci. Els més freqüents són els parells 21 - 34, 34 - 55 i 89 - 144.



Similar a les fulles és el succeït en les branques d'un arbre, que tampoc neixen sobreposades, sinó que de nou en espirals. La mida d'un arbre va variant al llarg de la seva vida, però el seu aspecte exterior és el mateix; es mantenen les proporcions entre la seva altura i la longitud de les seves branques, així com les seves formes relatives. Gràcies a això es pot distingir en la distància unes espècies d'unes altres sense haver d'estudiar amb deteniment les seves fulles o la seva escorça.

La proporció àuria i la música



Flors i pètals

El número de pètals de moltes flors sol ser també algun dels termes de la successió de Fibonacci, com en el cas de la lila (3), el ranuncle (5), l'esperó (8), la calèndula (13) o l'aster (21). Els diferents tipus de margarides tenen diferents nombres de pètals, però sempre són números de Fibonacci (21,34,55,89).

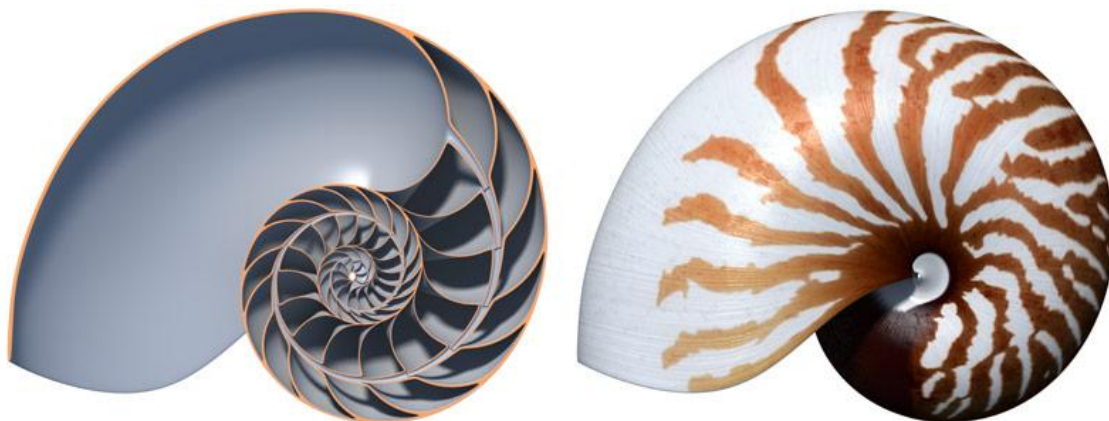
Un lloc comú en la història d'amor és la pregunta a la margarita, pètal a pètal: M'estima o no m'estima? Podria semblar que un matemàtic enamorat pot jugar amb avantatge a l'hora de desfullar la margarida, però no és així. Per sort, la naturalesa i les successions de Fibonacci segueixen deixant espai per l'atzar i la incògnita es manté intacte; tot i que el número de fulles de la margarida sigui un terme de Fibonacci, en la successió hi ha valors parells i imparells i no podem saber quantes fulles tindrà una margarida qualsevol. La pregunta romàntica sempre seguirà tenint una resposta imprevisible.

Com passa en l'arquitectura, a vegades la presència de la proporció àuria en les fulles i dimensions vegetals pot semblar més forçada que natural, però els casos rigorosament documentats no només són sorprenents, sinó molt suggerents i bells.



Els nàutils

L'espiral equiangular o àuria de la forma als caragols i pot ser al seu exemple més extraordinari és els nàutils o nàutil (*Nautilus pompilius*). L'estructura del seu interior es construeix afegint càmeres de major mida cada cop però sempre conservant la forma. Sobre cada part de la closca que roman s'afegeix una altra nova, exactament igual però més gran.



La proporció àuria i la música

En l'estructura espiral del nàutil influeixen també els moviments de turbulència amb velocitat d'expansió creixent, que podem observar en els remolins dels rius o en un líquid que marxa per el desguàs. A gran escala, aquesta es la disposició de les galàxies.



En la naturalesa apareixen altres tipus d'espivals, com la que forma un cuc al enrotllar-se, en que l'espival és d'amplada constant. Es tracta d'un espival d'Arquímedes, que en realitat no té relació amb Φ . També hi ha en la naturalesa estructures procedents de la forma pentagonal, com l'estrella de mar.

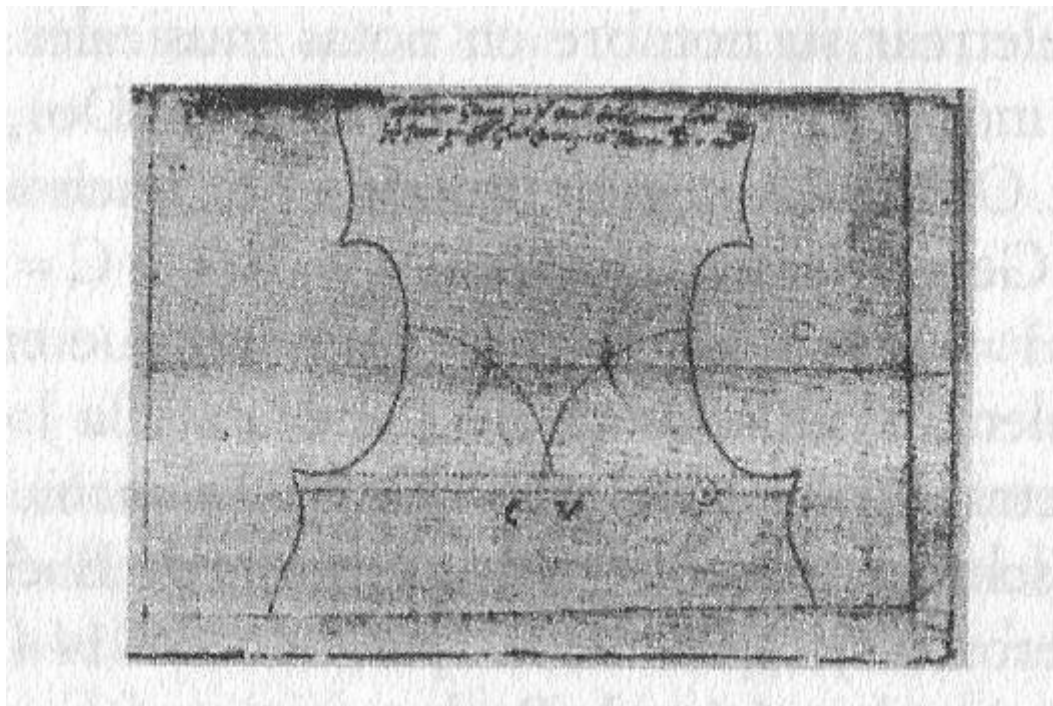
2ª PART. LA PROPORCIÓ ÀURIA EN LA MÚSICA

Avui en dia, tots els quartets de corda i orquestres simfòniques utilitzen el descobriment de Pitàgores sobre les relacions dels números enters amb els tons musicals. A més, des de l'antiga Grècia fins l'Edat Mitjana, la música es considerava una part de les matemàtiques, i els músics concentraven els seus esforços en comprendre la base matemàtica dels tons. El concepte de la “música de les esferes” va representar una síntesis fabulosa entre la música i les matemàtiques, i en la imaginació de músics i matemàtics, va ordinar la totalitat del cosmos en un gran disseny que només podien percebre els escollits. En paraules del gran orador i filòsof romà Cicerón (prop del 106-43 a.C.): “Les orelles dels mortals estan plenes d'aquests so, però són incapaces d'escoltar-lo... És el mateix que intentar mirar el Sol directament; els seus rajos són més potents que els teus ulls.” No va ser fins al segle XII quan la música es va deslligar de les prescripcions i fórmules matemàtiques. No obstant, en el segle XVIII, el filòsof racionalista alemany Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) va escriure el següent: “La música és un exercici aritmètic secret i la persona que s'entrega a ella no té present que està manipulant números.” En aquesta mateixa època, el gran compositor alemany Johann Sebastian Bach (1685-1750) va quedar fascinat per un tipus de joc que pot jugar-se amb notes musicals i números. Per exemple, Bach va encriptar la seva firma en algunes de les seves composicions mitjançant codis musicals. En la notació musical alemanya, B és Si bemoll, de manera que Bach va poder lletrejar el seu nom en notes musicals de la següent manera: B (Si bemoll), A (La), C (Do), H (Si natural). Una altra encriptació utilitzada per Bach, que es basa en la gematria. Si agafem $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, etc., $B-A-C-H = 14$ i $J-S-B-A-C-H = 41$ (Perquè en l'alfabet alemany de l'època de Bach la I i la J eren la mateixa lletra). En el seu entretingut llibre *Bachanalia* (1994), Erich Altschuler, matemàtic i entusiasta de Bach, ofereix nombrosos exemples de l'aparició del 14 (BACH en codi) en la música de Bach que, creu, van ser col·locats a propòsit per el músic. Per exemple, en la primera fuga, la Fuga en Do Major, del Primer Llibre *El Clave Bien Temperado*, el tema té catorze notes. A més, de les vint-i-quatre entrades, vint-i-dos arriben fins al final i vint-i-tres quasi fins al final. Només la catorzena entrada conclou molt abans del final. Segons les especulacions de l' Altschuler, l'obsessió de Bach per encriptar la seva firma en les composicions seria familiar a la dels artistes que incorporen el seu propi retrat en els llenços o a la dels cameos d' Alfred Hitchcock en cada una de les seves pel·lícules.

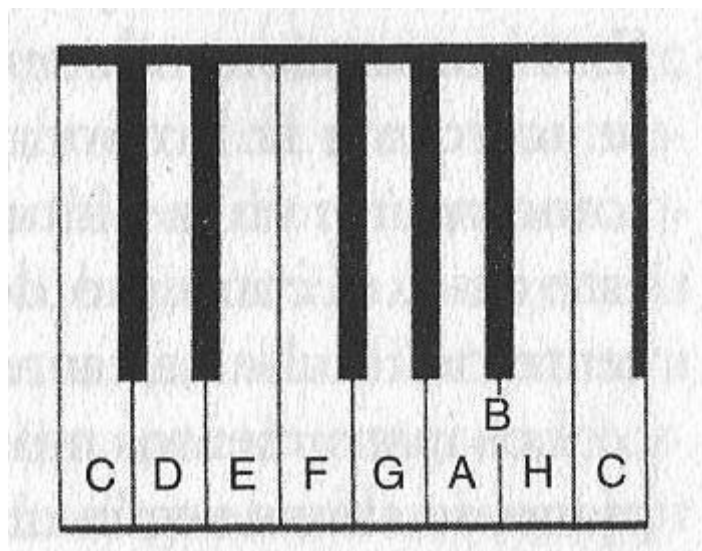
La proporció àuria i la música

Donada aquesta relació històrica entre la música i els números, la pregunta natural que hauria de fer-se és si la proporció àuria (i els números de Fibonacci) van influir en el desenvolupament dels instruments musicals o en la composició musical.

El violí és un instrument en el que apareix normalment la proporció àuria. Generalment, la caixa de ressonància del violí conté dotze o més arcs de curvatura (el que provoca la curvatura del violí) en cada costat. L'arc pla de la base sovint està centrada en la secció àuria que marca el centre de la línia.



Alguns dels millors violins van ser construïts per Antonio Stradivari (1644-1737) en Cremona, Itàlia. Els dibuixos originals indiquen que Stradivari va dedicar un especial atenció a col·locar els “ulls” dels orificis en forma de f geomètricament en posicions determinades per la proporció àuria. Són pocs (si es que hi ha algú) els que creuen que l'aplicació de la proporció àuria és la responsable de la superior qualitat del violí Stradivari. La major part de les vegades, els potencials ingredients “secrets” citats són el vernís, la cola, la fusta o l'habilitat de l'artesà. Molts experts coincideixen en senyalar que la popularitat dels violins del segle XVIII en general prové de la seva adaptabilitat per l'ús en grans sales de concert. La major part de aquests experts, també sol comentar que no existeix cap “secret” en els violins Stradivari; tan sols són obres d'art inimitables, la suma d'una sèrie de parts realitzades mitjançant un domini artesanal suprem.



Un altre instrument musical que sol se relacionat amb els números de Fibonacci és el piano. La octava d'un teclat està formada per tretze tecles, vuit blanques i cinc negres. Les cinc negres formen a la seva vegada un grup de dos i un altre de tres tecles. Els números 2,3,5,8 i 13 resulta que són tots ells números consecutius de Fibonacci. La preponderància de l'escala en Do major, per exemple, es deu, en part, a que si es toca amb les tecles blanques. De totes maneres, la relació existent entre les tecles del piano i els números de Fibonacci probablement és un tema introduït en la discussió només per desvirtuar-la. En primer lloc, observem que l'escala cromàtica, fonamental per la música occidental, en realitat està formada per dotze semitons i no tretze. La mateixa nota, C (Do) , es toca dues vegades en l'octava per indicar que s'ha completat el cicle. En segon lloc, i el que és més important, la disposició de les notes en dues fileres, amb el sostinguts i bemolls agrupats de dos i tres tecles en la fila superior, es remunta a principis dels segle XV, molt abans de la publicació del llibre de Pacioli i molt abans de qualsevol estudi seriós sobre els nombres de Fibonacci.

De la mateixa manera que els numeròlegs auris afirmen que la proporció àuria té propietats estètiques especials en les arts visuals, també li atribueixen efectes particularment plaents en la música. Per exemple, els llibres sobre la proporció àuria sostenen que són molts els que consideren a la sisena major i a la sisena menor, ambdues relacionades amb la proporció àuria, els dos intervals musicals més plaents. Un to musical pur es caracteritza per una freqüència fixa (es mesura per el número de vibracions per segon) i per una amplitud fixa (la qual determina el volum instantani). El to estàndard utilitzat per l'afinació és A (La) la qual vibra a 440 cops per segon. Es pot obtenir una sisena en La major de la combinació de La amb Do, i aquesta última nota es produeix amb una freqüència d'unes 260 vibracions per segon. La proporció de

La proporció àuria i la música

ambdues notes, 440/260, es redueix a 5/3, la proporció de dos números de Fibonacci. Es pot obtenir una sisena menor d'un Do alt (528 vibracions per segon) i un Mi (330 vibracions per segon). En aquest cas la proporció 528/330 es redueix a 8/5, el que també resulta una proporció de dos números de Fibonacci i també molt propera a la proporció àuria. De totes maneres, com passa a la pintura, també en aquest cas, el concepte del "interval musical més plaent" resulta bastant ambigu.

Els instruments musicals amb notes fixes, com el piano, s'afinen segons una "escala temperada" que va popularitzar Bach i en la qual cada semitò té una proporció de freqüència igual al següent semitò, el que fa que sigui més fàcil de tocar en qualsevol tecla. La proporció de dues freqüències adjacents en un instrument de vent temperat és $2^{1/12}$ (la dotzena arrel de 2). De fet, els seus orígens es poden trobar a l'antiga Gràcia. Recordi que una octava s'obtenia al dividir una corda en dos parts iguals (una proporció de freqüència de 2:1) i una quinta mitjançant una proporció de freqüència 3:2 (bàsicament utilitzant dos terços d'una corda). Una de les preguntes que més va intrigar als pitagòrics va ser si al repetir el procediment per crear una quinta (aplicant la proporció de freqüència 3/2 de forma consecutiva) es podia generar un número sencer d'octaves. En termes matemàtics, això és el mateix que preguntar: Existeixen dos números sencers n i m tals que $(3/2)^n$ sigui igual a 2^m ? Sembla ser que, tot i que no existeixin dos números sencers que encaixin perfectament en aquesta igualtat, $n=12$ i $m=7$ s'apropa molt degut a la coincidència de que $2^{1/12}$ es pràcticament igual a $3^{1/19}$ (la dinovena arrel de 3). Les dotze freqüències de l'octava són, per tant, totes elles potències aproximades de la proporció de freqüència bàsica $2^{1/12}$. Per cert, resulta extraordinari que la proporció de 19/12 sigui igual a 1,58, no massa lluny de Φ .

Una altra forma en que la proporció àuria podria, en principi, contribuir a la satisfacció d'una peça musical és a través del concepte d'equilibri proporcional. No obstant, en aquest cas, la situació és una mica més tramposa que en el de les arts visuals. Una pintura poc proporcional destacarà a l'instant grotescament en una exposició. En el cas de la música, per el contrari, hem d' escoltar la peça completa abans de jutjar. Sens dubte, no existeix cap dubte de que els compositors experimentats dissenyen l'estructura de l'obra de tal manera que no només les diverses parts encaixin entre si, sinó que cada una de elles aïlladament es converteixi en un perfecte espectacle de l'argument musical.

Hem presenciat molts exemples en que els entusiastes de la proporció àuria escrutaven les proporcions de nombroses obres de les arts visuals per descobrir aplicacions potencials de Φ . Aquests aficionats han realitzat escritinis similars amb

La proporció àuria i la música

composicions musicals. Els resultats són molt semblants: juntament amb algunes utilitzacions reals de la proporció àuria com a sistema de proporcions, trobem multitud de conceptes erronis.

Paul Larson, de la Universitat de Temple, va firmar al 1978 que havia descobert la proporció àuria en la música occidental més antiga registrada: les salmòdies “kyrie” de la col·lecció de cants gregorians coneguts com *Liber Usualis*. Les trenta salmòdies kyrie de la col·lecció cobreixen un període de més de sis-cents anys, començant per el segle X. Segons Larson, havia trobat un “esdeveniment” significatiu (el començament i final d’una frase musical) en la separació en proporció àuria de 105 de les 146 seccions dels kyries que havia analitzat. En absència de cap justificació històrica que li donés suport ni de cap raó fonamental convincent per l’ús de la proporció àuria en aquests cants.

En general, comptar notes i pulsacions revela varies correlacions numèriques entre diferents seccions de l’obra musical, pel que fa això, l’analista s’enfronta a una temptació comprensible que el pot portar a concloure que el compositor va introduir relacions numèriques. De fet, sense una base documental sòlida (que molt sovint trobem a faltar), aquestes afirmacions resulten dubtoses.

En 1995, el matemàtic John F. Putz del Alma College, Michigan, va intentar esbrinar si Mozart (1756-1791) havia utilitzat la proporció en els vint-i-nou moviments de les seves sonates⁶ per a piano compostes per dues seccions marcades. Generalment, aquestes sonates estan compostes per dues parts: l’ Exposició, en la qual s’introdueix per primer cop el tema musical, i el Desenvolupament i Recapitulació, on es desenvolupa i torna al tema principal. Donat que les peces musical estan dividides en unitats de temps iguals anomenats *compassos*, Putz va examinar les proporcions del nombre de compassos de les dues seccions de les sonates. Mozart, qui “només va parlar i pensar sobre xifres” durant el temps que va assistir a l’escola (segons el testimoni de la seva germana), probablement es tracti del millor candidat per la utilització de les matemàtiques en les seves composicions. De fet, molts articles anteriors han proclamat que les sonates per a piano de Mozart reflecteixen la proporció àuria. Els primers resultats de Putz semblaven molt prometedors. En la *Sonata n°1 en Do Major*, per exemple, el primer moviment està compost per seixanta-dos compassos en el desenvolupament i recapitulació i trenta-vuit en la exposició. La proporció $62/38=1,63$ s’apropa bastant a la proporció àuria. De totes maneres, un

⁶ Composició musical que, per oposició a la cantata, és per a ésser "sonada" amb instruments.

La proporció àuria i la música

examen detallat de totes les dades van convèncer a Putz de que Mozart *no* va utilitzar la proporció àuria en les seves sonates, ni tampoc va quedar clar per què la simple qüestió dels compassos proporcionava un efecte plaent. Per tant, sembla que tot i que són molts els que creuen que la música de Mozart és realment “divina”, la “proporció divina” no forma part d’ella.

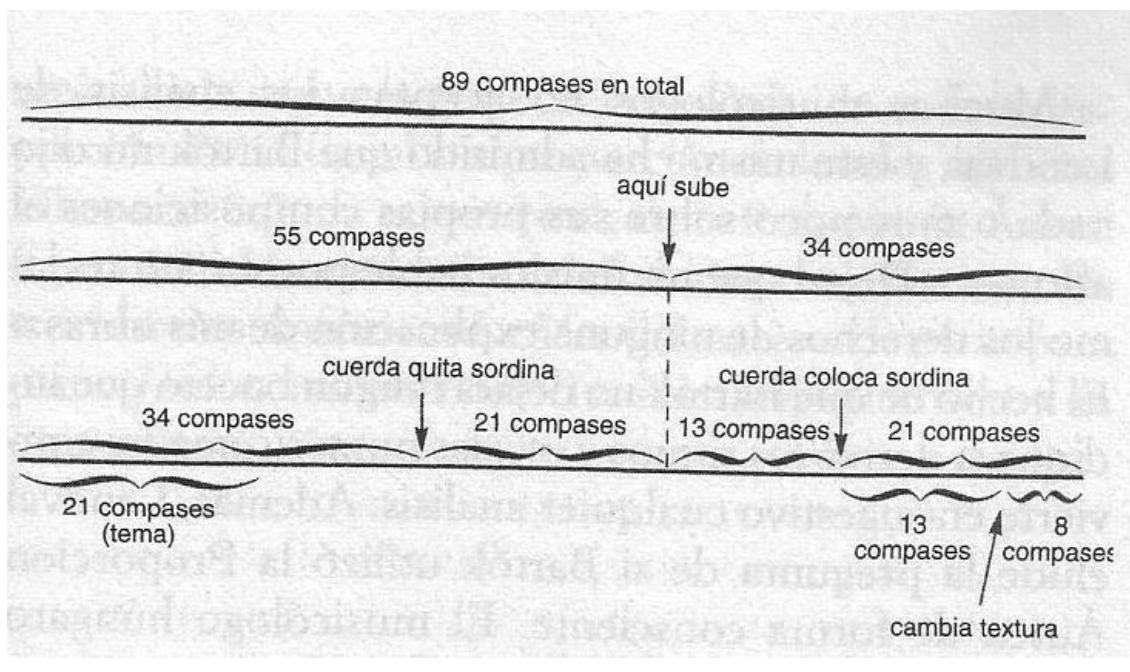
Un famós compositor que si que pot haver utilitzat la proporció àuria de forma extensa és el hongarès Béla Bartók (1881-1945). Bartók, un virtuós pianista i folklorista, va fusionar elements d’altres compositors que admirava (incloent-hi a Strauss, Liszt i Debussy) en música popular, per crear una música altament personal. En una ocasió va comentar que “el món melòdic dels seus quartets de corda no difereix massa de les cançons populars”. La vitalitat rítmica de la seva música, combinada amb una simetria formal ben calculada, es van unir per fer de Bartók un dels compositors més originals del segle XX.

El musicòleg hongarès Ernő Lendvai va investigar sense descans la música de Bartók i va publicar molt llibres i articles sobre el tema. Lendvai assegura que “a partir de l’anàlisi estilístic de la música de Bartók, he pogut concloure que l’element principal de la seva tècnica cromàtica es deu, en tots els casos, a les lleis de la secció àuria”.

Segons Lendvai, l’habilitat de Bartók amb el ritme de les seves composicions proporciona un exemple excel·lent de la utilització de la proporció àuria. Mitjançant l’anàlisi de la fuga de *Música per a corda, percussió i celesta*, per exemple, Lendvai mostra que els vuitanta-nou compassos del moviment estan dividits en dues parts, una amb cinquanta-cinc compassos i una altra trenta-quatre, per la punta piramidal (en terme de volum) del moviment. Les següents divisions ven emmarcades per la col·locació i extracció de la sordina⁷ dels instruments i per altres canvis textuals. Tots els números de compassos són números de Fibonacci, amb les proporcions de les parts majors (55/34) properes a la proporció àuria. De forma similar, en la *Sonata per dos pianos i percussió*, els diversos temes desenvolupats en Fibonacci/Proporció àuria s’ordenen segons el número de semitons.

⁷ Dispositiu que serveix per a modificar o disminuir la sonoritat en els instruments músics.

La proporció àuria i la música



Molts musicòlegs no accepten l'anàlisi de Lendvai, i aquest mateix va admetre que Bartók no va dir res o molt poc sobre les seves pròpies composicions a la firma: "deixeu que la meva música parli per mi; no reclameu els drets de cap explicació de les meves obres." El fet de que Bartók no deixés cap esbós que indiqués si va derivar els ritmes i escales numèricament converteix suggestiu qualsevol anàlisi. A més, Lendvai eludeix la pregunta de si Bartók va utilitzar la proporció àuria de forma consistent. El musicòleg hongarès Laszlo Somfai, en el llibre *Béla Bartók: Composition, Concepts and Autograph Sources*, descarta totalment la possibilitat de que Bartók utilitzés la proporció àuria. Mitjançant un anàlisi detallat d'unes 3600 pàgines (que el van mantenir ocupat tres dècades) Somfai conclou que Bartók va compondre sense cap teoria musical preconcebuda. Altres musicòlegs, inclòs Ruth Tatlow i Paul Griffiths, també qualifiquen l'estudi de Lendvai com "dubtós".

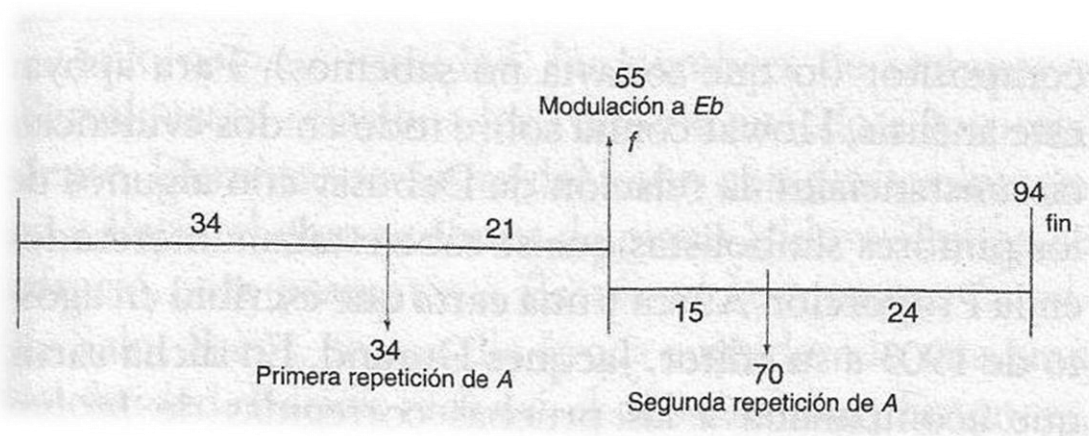
The image shows a musical score with three staves. The first staff is labeled 'Leitmotiv', the second 'Tema principal', and the third 'Tema secundario'. Below the staves, there is a table showing the lengths of these themes and their relationships to Fibonacci numbers:

leitmotiv	$3 + 5 = 8$
tema principal	$5 + 8 = 13$
tema secundario	13,21

En l'interessant llibre *Debussy in Proportion*, Roy Howat, de la Universitat de Cambridge, suggereix que el compositor francès Claude Debussy (1862-1918), les innovacions harmòniques de les quals van tenir una profunda influència en generacions de compositors, van utilitzar la proporció àuria en nombroses composicions. Per exemple, en el solo de piano titulat *Reflets dans l'eau* (Reflexes en l'aigua), una part de la sèrie *Images*, la primera represa del rondó⁸ es produeix en el compàs 34, és a dir, en el punt de la proporció àuria entre el començament de la peça i l'inici de la secció climàtica darrere el compàs 55. Tan 34 com 55 són, per suposat, números de Fibonacci, i la proporció 34/21 és una bona aproximació a la proporció àuria. La mateixa estructura es repeteix en la segona part, la qual es divideix en una proporció 24/15 (igual a la proporció als dos números de Fibonacci 8/5, de nou a prop de la proporció àuria).

⁸ Composició generalment instrumental, derivada del rondeau de la darrerria del segle XVIII, que es basa en l'alternança d'un refrany en principi invariable i episodis diversos.

La proporció àuria i la música



Howat va trobar divisions similars en els tres esbossos simfònics *La Mer* (El mar), en la peça per a piano *Jardins sous la Pluie* (Jardins sota la pluja) i en altres obres.

Coneixent la història de *La Mer*, es difícil creure que Debussy utilitzarà algun disseny matemàtic en la composició d'aquesta peça en concret. Debussy va començar *La Mer* en 1903, i en una carta que va escriure el seu amic André Messager diu: “potser no sàpigues que el meu destí era ser mariner i que només l'atzar ha volgut dirigir-me en una altra direcció. Sens dubte, continuo sentint una gran passió per ell (el mar).” En el moment en que va acabar *La Mer*, 1905, la seva vida havia experimentat un tomb. Havia abandonat a la seva primera dona, *Lily* (el seu nom autèntic era Rosalie Texier), per la fascinant Emma Bardac; *Lily* va intentar suïcidar-se, i tan ella com Bardac van portar el compositor davant dels tribunals. A l'escoltar *La Mer* – probablement la seva obra més personal i apassionada–, podem percebre no només un retrat musical del mar, potser inspirat en el treball del pintor anglès Joseph Mallord William Turner, sinó també una expressió del tumultuós període de la vida del compositor.

Donat que Debussy no va dir molt sobre la seva tècnica compositiva, hi ha una clara distinció entre el que deu ser una interpretació forçada imposada a la composició i la intenció real i conscient del compositor (el que encara no sabem). Per donar suport a aquest anàlisi, Howat va confiar sobre tot en dues evidències circumstancials: la relació de Debussy amb algun dels pintors simbolistes que sabem que estaven interessats en la proporció àuria i una carta que va escriure l'agost de 1903 al seu editor, Jacques Durand. En aquesta carta, que acompanyava a les proves corregides de *Jardins sous la Pluie*, Debussy parla d'un compàs que faltava en la composició: “De totes maneres, es necessari, en quant al número; el número diví.” La implicació d'això

La proporció àuria i la música

no és únicament que Debussy fos construït la seva estructura harmònica amb números amb general sinó que el “número diví” (suposant que es relaciona amb la proporció àuria) jugava un paper important.

Howat també suggereix que Debussy estava influït pels escriptors del matemàtic i crític d'art Charles Henry, qui tenia gran interès en les relacions numèriques inherents a la melodia, harmonia i ritme. Les publicacions de Henry sobre estètica, com *Introduction à une esthétique scientifique* (Introducció a una estètica científica; 1885), atorgaren un paper central a la proporció àuria.

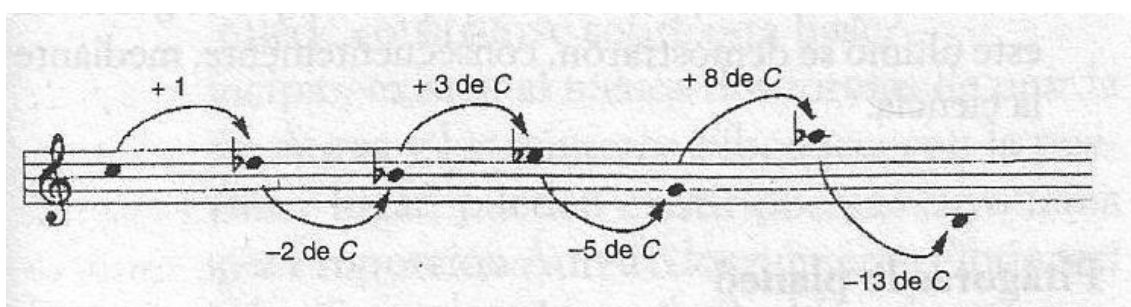
És probable que no sapiguem mai en tota seguretat si aquest gran pilar del modernisme francès va pretendre realment utilitzar la proporció àuria per a controlar les proporcions formals. Un dels seus pocs estudiants de piano mademoiselle Worms de Romilly, va escriure en una ocasió que “sempre es lamentava de no haver-se dedicat a la pintura en lloc de la música”. L'estètica musical altament original de Debussy va poder haver-se recolzat, fins a cert punt en l'aplicació de la proporció àuria, però és evident que aquesta no va ser la principal font de la seva creativitat.

Només com a curiositat, els noms de Debussy i Bartók estan relacionats amb una anècdota sorprenent. Durant una visita del jove compositor hongarès a París, el gran professor de piano Isidore Philipp es va oferir per presentar a Bartók al compositor Camille Saint-Saëns, en aquella època considerat una gran celebritat. Bartók va refusar l'ofertament. Llavors, Philipp li va oferir presentar-li el gran organista i compositor Charles-Marie Widor, però Bartók va tornar a refusar l'ofertament. “Bé”, li va dir Philipp, “Si no vol conèixer a Saint-Saëns ni a Widor, aquí l'agradaria conèixer” “Debussy”, va contestar Bartók. “Però si es un home horrible”, va dir Philipp. “Odia a tot el món i segur que serà descortès amb vostè. Vol que l'insulti?” “Si”, va contestar Bartók sense dubtar-ne.

La introducció de tecnologies d'enregistrament i la música per ordinador en el segle XX van accelerar els càlculs numèrics precisos i, per tant, van estimular la música basada en números. El compositor austríac Alban Berg (1885-1935), per exemple, va construir tot el seu *Kammerkonzert* al voltant del número 3: unitats de trenta compassos amb tres temes amb tres “colors” bàsics (piano, violí i vent). El compositor francès Olivier Messiaen (1908-1992) va utilitzar números conscientment (per determinar el número de moviments, per exemple) en les construccions rítmiques. Sens dubte, quan en 1978 se li va preguntar específicament sobre la proporció àuria, va negar que hagués fet us d'ella. El compositor colorista, matemàtic i professor Joseph Schillinger (1895-1943) va exemplificar per la seva pròpia personalitat i

La proporció àuria i la música

l'ensenyament de la visió platònica de la relació entre les matemàtiques i la música. Després d'estudiar en el Conservatori de San Petersburg, i donar classes i compondre en les acadèmies estatals de Járkov i Leningrad, es va establir als Estats Units en 1928, on es va convertir en professor tant de matemàtiques com de música en diverses institucions, incloent-hi la Universitat de Columbia i la de Nova York. El famós compositor i pianista George Gershwin, el clarinetista i director d'orquestra Benny Goodman i Glenn Miller van ser tots ells estudiants de Schillinger qui creia fermament en la base numèrica de la música i, de forma concreta, va desenvolupar un Sistema de Composició Musical en el que notes successives de la melodia, seguien intervals de Fibonacci al ser contats en unitats de semitón.



Per a Schillinger aquests salts de Fibonacci de les notes, transmetien el mateix sentit d'harmonia que les proporcions fil·lotàctiques de les fulles en el tall que transmetien als botànics. Schillinger va trobar "música" en els llocs més estranys. En *Joseph Schillinger: A Memoir*, la biografia escrita per la seva viuda, l'autor explica la història d'una excursió en cotxe durant una tempesta: "Els cops de la pluja tenen un ritme i els neteja parabrisas un model rítmic. Això es art inconscient." Un dels intents de Schillinger per a demostrar que la música podia estar basada completament en formulacions matemàtiques va ser especialment divertit. Va copiar les fluctuacions del mercat de valors del *New York Times* en paper quadriculat, traslladant les pujades i baixades a intervals musicals proporcionals, i va demostrar que es podia obtenir una composició similar algunes de les del gran Johann Sebastian Bach.

El crític musical vienès Eduard Hanslick (1825-1904) va expressar la relació existent entre la música i les matemàtiques de forma esplèndida en el seu llibre *The Beautiful in Music*:

La "música" de la naturalesa i la música de l'home pertanyen a dues categories diferents. La traducció d'una a una altra passa per la ciència de les matemàtiques. Una proporció important i fecunda. No obstant, ens equivocarem si pretenem construir-lo

La proporció àuria i la música

del mateix mode en que l'home va formular el sistema musical seguint càlculs predeterminats, ja que el sistema deriva de l'aplicació inconscient de conceptes preexistents sobre la quantitat i la proporció, a través de processos subtils de mesura i càlcul; però les lleis per les que es governa aquest últim es demostraren, consegüentment, mitjançant la ciència.

OBRES REPRESENTATIVES

1.1. Johann Sebastian Bach

PRELUDI Nº. 5 EN RE M BWV 850

Anàlisi de la proporció (secció àurea) en el Preludi en Re M BWV850 de J.S.Bach

(Annex 1)

La proporció àuria i la música

El Preludi n ° 5 en Re major BWV 850 són dos ràpids *perpetuum mobile*⁹ en semicorxeres regulars que desemboquen en un breu i brillant recitatiu.

És un preludi¹⁰ de 35 compassos en la tonalitat¹¹ de Re M, que utilitza dues figures rellevants durant tot el preludi.

El podríem dividir en dos segments, els primers tretze compassos i els vint-i-un restants. En els primers tretze compassos segueix la proporció d' una manera harmònica¹², ja que en el tercer compàs anticipa la dominant que no arriba fins al cinquè compàs, els vuit compassos restants són modulacions¹³ pels acords de la tonalitat. En el tretzè compàs torna a Re M, la tònica, per confirmar l' última modulació i final del primer segment.

La segona part del preludi comença amb una sèrie de vuit compassos on segueix modulant com anteriorment dins de la tonalitat de Re M, fins arribar als tretze compassos on s'estableix a la tònica. Els últims nou compassos utilitza un pedal¹⁴ de dominant, per crear una tensió que conclourà en Re M.

Com podem observar, utilitza la sèrie de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 sobretot en l' àmbit dels compassos i l' harmonia. El preludi no té els 34 compassos exactes, però si observem la partitura, veiem que l' antepenúltim compàs no formaria part de l' anàlisi, ja que serveix d' enllaç per concloure amb un final brillant.

⁹ Peces de música, o parts de peces, caracteritzades per un corrent continu i fixa de notes, usualment en un tempo ràpid.

¹⁰ Peça musical breu, de forma lliure, sovint per a instruments de teclat, que als s. XVI i XVII solia precedir una obra més extensa i complexa.

¹¹ Organització jeràrquica dels sons amb relació a una nota de referència, l'anomenada tònica en el sistema major-menor, com a punt d'atracció de tots els sons utilitzats.

¹² Reproducció d'un moviment melòdic i dels seus acords corresponents (o *model*) a intervals regulars ascendents o descendents (*progressió*).

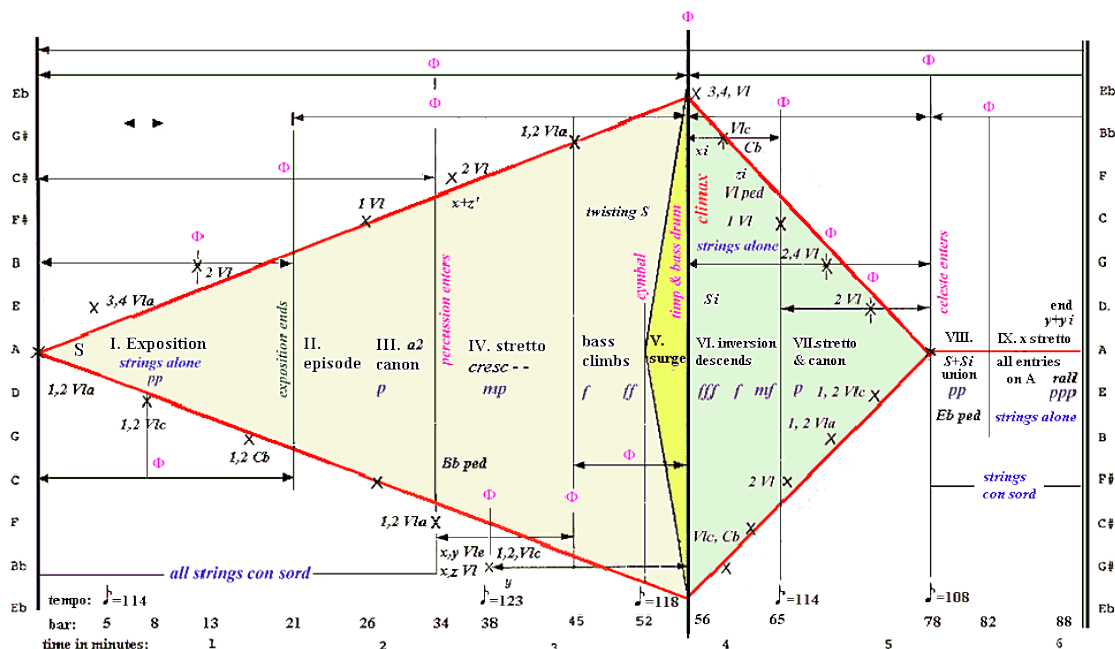
¹³ Acció de passar d'una modalitat o d'una tonalitat a una altra. La modulació es pot efectuar d' una tonalitat als seus tons veïns o a uns altres de més allunyats.

¹⁴ Nota que es prolonga durant un temps, generalment en el baix, i que no forma part necessàriament dels acords que constitueixen les altres veus.

1.2. Béla Bartók

MÚSICA PER A CORDA, PERCUSSIÓ I CELESTA (Primer moviment)

Bartók: Music for String Instruments, Percussion and Celeste I. Fugue graphic analysis by Solomon



(Annex 2)

El seu treball és exhaustiu per arribar al primer moviment, a la realització exacta del nombre d'or, Bartók, compositor hongarès considerat un dels grans creadors del llenguatge musical del segle XX, tria la fuga¹⁵ com a forma musical per al primer moviment d'aquesta obra.

Per escoltar la fuga, hem de tenir en compte que comença amb l'exposició d'un tema o subjecte que ha d'aparèixer successivament en quatre veus o entrades diferents. Al subjecte li segueix una resposta o episodi. Cada veu s'està desenvolupant mitjançant episodis o motius que ha extret del subjecte principal fins arribar a l'estret, on s'acumulen les veus i tot es torna més dens.

El procediment utilitzat pel compositor consisteix a realitzar un difícil sistema de relacions intervàliques, o distàncies numèriques entre notes; des d'aquesta numeració, realitza una escala de Fibonacci, és a dir, assigna un número a cada nota que li permetrà construir el subjecte de la fuga utilitzant aquests sons.

¹⁵ Forma musical contrapuntística monotemàtica, de desenvolupament complex, basada en la imitació del tema.

La proporció àuria i la música

Realitza la fuga en un total de 89 compassos. En els primers 55 genera la tensió que ha de portar tota fuga des de l'exposició del tema fins al punt culminant, per concloure 34 compassos més tard. En el moment de culminació de l'estret tenim exactament el número d' or. Després Bartók porta magistralment la fuga en decadència fins al final, moment en què apareix la celesta, instrument de tecla amb so similar al d' un carilló.

Les cordes es troben dividides en dos grups:

- Grup 1 – violins primers i segons, violes primeres, violoncel·ls primers i contrabaixos primers.
- Grup 2 – violins tercers i quarts, violes segones, violoncel·ls segons i contrabaixos.

En aquest primer moviment no utilitzen el piano ni l'arpa i les percussions només intervenen en circumstàncies especials: la gran caixa en el compàs 56, els plats en 2, en l'1 i en el 52, els timbals en 4, del 34 al 38, i la celesta en una intervenció amb 144 fosses, on el color instrumental està, doncs, gairebé il·limitant les cordes.

Les cordes, estan dividides en dos grups i, en iniciar el tema, entren les violes primeres i segones on es produeix, per la seva diferent situació, un efecte "estèreo".

El primer moviment, és tranquil, s'inicia amb l'enunciat del tema amb les violes primeres i segones, amb sordina. El tema es troba dividit en quatre seccions o cèl·lules separades per pauses de corxera. Al seu torn aquestes quatre cèl·lules s'agrupen en dues frases (A i B), la primera creant una tensió que es resol en la segona. En la frase A es recorren tots els graus cromàtics¹⁶ compresos des de la nota inicial LA –que serà també la nota final i que compleix la funció de tònica–, fins a la més aguda d' ella, MI *b*. La frase puja fins a MI però baixa fins SI *b* formant així dos àmbits de distància de to que vénen enquadrats dins del típic sistema tonal de Bartók.

S'observa una constant de relacions subdominant–tònica–dominant, la mateixa constant s'observa en el cercle de quintes¹⁷ complet.

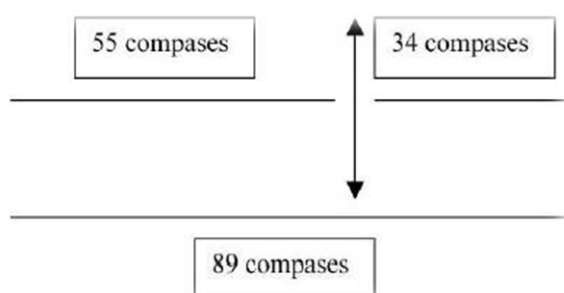
¹⁶ Procediment musical consistent en l'alteració en un semitò descendent o ascendent d'una nota o més d'una escala diatònica.

¹⁷ Sèrie de dotze quintes ascendents —o descendents— que, en el sistema temperat, formen un cercle tancat, en el qual hom va trobant els dotze graus de l'escala cromàtica i l'ordre d'accidents de les armadures que determinen les escales clàssiques *major* i *menor*.

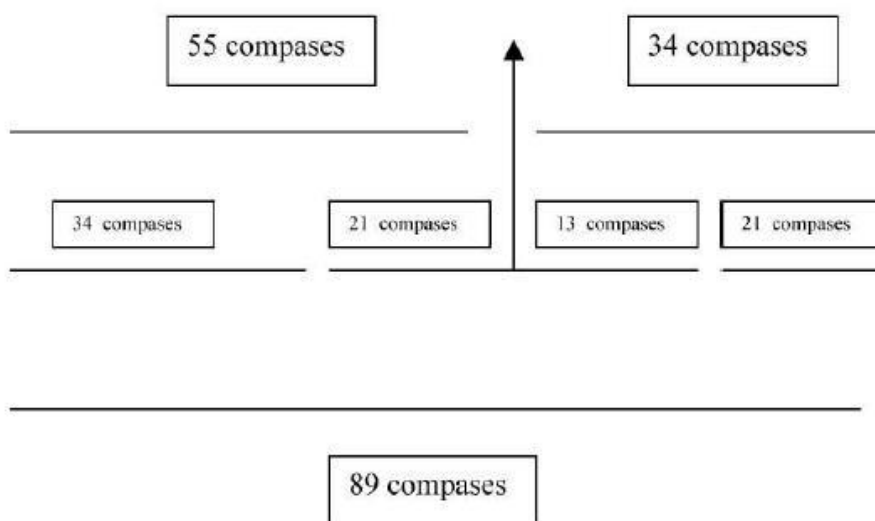
La proporció àuria i la música

La corba dinàmica general de la fuga completa que s'inicia en *pp* (i amb sordines) finalitza en *pp* (i així mateix amb sordines); el *fff*, al qual es puja gradualment, s'aconsegueix en el punt culminant (HP) per decreixer fins al *ppp* final.

Tot aquest moviment ve generat i controlat per l'anomenada secció àuria; la proporció 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 ... (sèrie de Fibonacci) en un seus aspectes més senzills i en ella es basa la fuga de Bartók. En els primers 55 compassos es crea la tensió que troba el seu punt culminant en el compàs 56 per concloure 34 compassos més tard, i com l'obra consta de 89 compassos, ho podríem descriure gràficament així:



La corba d'intensitats ve controlada per l'ús de les sordines: les cordes col·loquen les sordines en el compàs 1 fins al 34 i els darrers 21 sense sordina. A partir del compàs 55 s' estan 13 compassos més sense sordina fins els últims 21 compassos. En total, amb sordina, toquen els 34 primers compassos més els 21 finals que és igual a 55 i, sense sordines, toquen 21 compassos més els 13 centrals, per tant, 34 compassos:



3ª PART. APLICACIONS DELS PRINCIPIS A LA CREACIÓ

1. Seguiment

A l' hora d' aplicar els principis de la proporció àuria a la creació de l' obra he analitzat diferents formes i recursos sobre la composició. Primerament hi havia tres opcions diferents per aplicar la proporció: partint de la totalitat de l' obra ja composta, partint d' una secció i segons la sèrie de Fibonacci.

Partint de la totalitat de l' obra ja composta

Si partim d' una cançó amb dos idees diferents i les volem unir o si volem afegir un canvi, una pausa, un pont, una nova melodia a una cançó. Podem utilitzar la proporció segons el temps de duració de la cançó. Imaginem que tenim una cançó que dura un temps determinat, i volem afegir-li una pausa o una canvi, etc... Perquè l' afegit estigui en proporció, la cançó haurà de ser dividida en dos segments principals. Per exemple, si la idea principal dura cinc minuts, ho passem a segons ($5 \text{ minuts} \cdot \frac{60 \text{ segons}}{1 \text{ minut}} = 300 \text{ segons}$), aquests 300 segons és el temps total de l' obra, per tant, el 100%, llavors si volem fer dos segments, un serà el 61.8% de la totalitat, i l' altre segment serà el 38.2% de la totalitat. D' aquesta manera si multipliquem els 300 segons per el 61.8% de la totalitat de l' obra, obtindrem en segons el punt exacte on segons la proporció àuria s' hauria de fer un canvi, una pausa, etc... ($300 \text{ s} \cdot 61.8\% = 185.4 \text{ s}$)

Partint d' una secció

En aquest cas, si partim d' una secció i volem acabar l' obra, abans li agregarem una nova secció, i perquè estigui amb proporció amb l' anterior, podem saber la duració de la nova secció agregada. Per exemple, la secció de la qual partim dura 180 segons (3 minuts) i volem afegir una nova secció justament en aquest punt seguint la proporció àuria. Llavors, als 180 segons li multipliquem el nombre d' or ($180 \text{ s} \cdot \varphi = 291.24 \text{ s}$), d' aquí obtenim els segons que durarà la segona part de l' obra, i l' obra concretament durarà 471.24 segons ($180 \text{ s} + 291.24 \text{ s} = 471.24 \text{ s}$), per tant, tindrem el punt exacte on segons la proporció àuria es troben les dues seccions.

Segons la sèrie de Fibonacci

Una altra forma és utilitzar la sèrie de Fibonacci a l' hora de compondre. Si recordem la sèrie de Fibonacci, és: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc. Aquí, per tant, és aplicar la sèrie als segons, als minuts, als compassos, al ritme o al patró que utilitzem. Per exemple, en el ritme, si apliquem la sèrie, podem introduir ritmes que durin un temps, dos temps, tres temps, etc. Més temps, seria complicat, ja que comportaria compassos irregulars o lligadures, però sempre es pot aplicar en formes de temps, com en l' imatge següent:

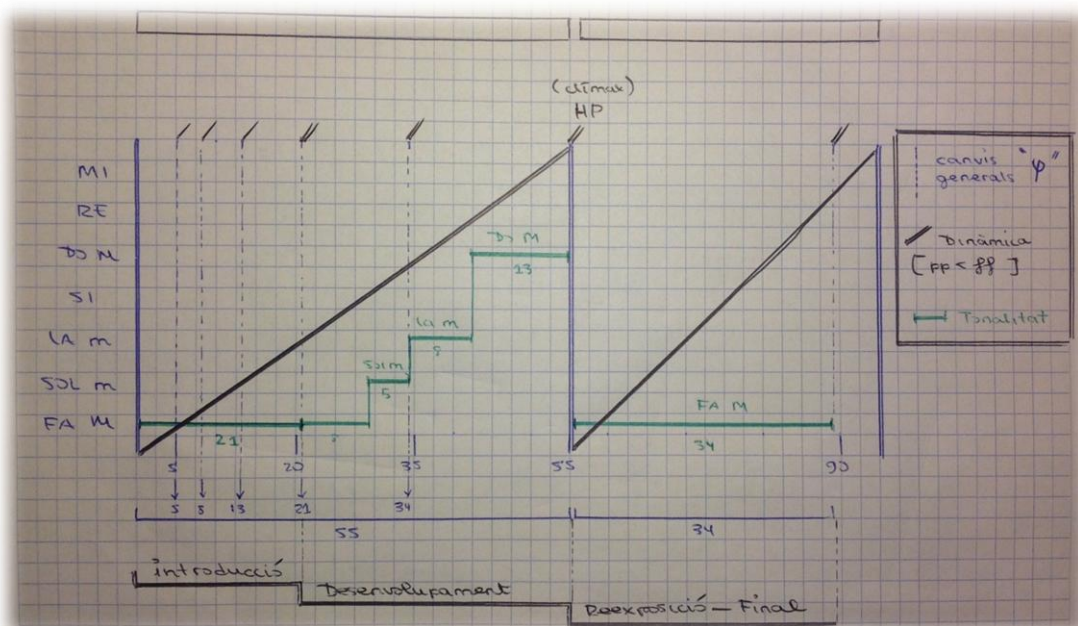


Una altra opció és en les notes de l' escala, seguint un patró, i la més utilitzada, en els compassos. Per tant, aplicar la sèrie de Fibonacci fa referència a aplicar uns canvis per cridar l' atenció.

Després de veure les diferents opcions, vaig escollir la més visual, en aquest cas la tercera, segons la sèrie de Fibonacci, que conté indirectament la primera opció i la segona.

Per començar vaig fer-me un esquema, amb la dinàmica, el nombre de compassos, les diferents entrades d' instruments, les diferents parts de l' obra, els canvis generals i les tonalitats diferents.

La proporció àuria i la música



Seguidament vaig inventar-me un patró de dos compassos, el qual apareix durant la composició, i amb aquests dos recursos, vaig començar primerament amb la introducció, seguidament el desenvolupament i per acabar la reexposició, utilitzant el programa: *Sibelius 6*.



La tonalitat de la composició, també segueix la proporció àuria:

DO (1) RE (2) MI (3) FA (4) SOL (5) LA (6) SI (7) Si seguim aquest seguit de notes, el punt auri el trobaríem aplicant el procés abans explicat, partint de la totalitat, en aquest cas 7 notes: $7 \cdot 61.8\% = 4.326 \cong 4$. Per tant, el nombre (4), la nota FA determinarà la tonalitat de la composició, en aquest cas en Fa M.

Aquest mateix mètode l' he utilitzat a l' hora de portar a terme les modulacions del desenvolupament. Si ens fixem, l' obra passa per un total de 4 tonalitats diferents, les quals són: Fa M (1) Sol m (2) La m (3) i Do M (5), curiosament com la sèrie de Fibonacci, això si partint des de la tonalitat, en aquest cas Fa M.

2. Autoanàlisi i característiques generals

La composició està dividida en tres parts, la introducció, el desenvolupament i la reexposició o final. L'obra té dos grans segments, el primer on apareix la introducció i el desenvolupament, i el segon segment amb tota la reexposició.

L'obra té un total de 89 compassos i dura 3' 30", el punt auri de l'obra es troba en el compàs 55 on justament es divideixen els dos grans segments, per tant, queden 55 compassos (introducció i desenvolupament) i 34 (reexposició).

En el primer segment, també trobem el punt auri en el compàs 21 on justament queda dividit en la introducció i el desenvolupament. Per tant, tenim 21 compassos introductoris on s'exposa el tema principal que serà exposat en la reexposició i el desenvolupament amb les diferents modulacions de l'obra.

En la composició he introduït diferents instruments, que al llarg de l'obra s'aniran alternant les entrades seguint el patró de la proporció àuria i la sèrie de Fibonacci, concretament ho fan en els compassos: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 i en altres compassos també característics per la secció àuria. Els diferents instruments són: Flauta, oboè, clarinet i fagot (Vent fusta) ; Trompa, trompeta i trombó (Vent metall) ; Violins, Violes, violoncels, contrabaixos i el piano (Cordes) ; Timbales i percussió (Percussió).

En el segon segment, si ens hi fixem, trobem que la melodia principal i l'acompanyament van canviant d'instruments, amb una duració de 8 compassos, on van alternant primerament les cordes, després la secció de vent metall i per últim vent fusta, amb els acompanyaments passa exactament el mateix a diferència del piano i de la percussió que no varien, en aquest cas la percussió no entre fins vuit compassos després del principi de la reexposició. Aquesta repetició de la melodia la fan 3 cops, i així enllacen amb el final conclusiu i culminant de l'obra.

(Annex 3)

CONCLUSIONS

Una vegada finalitzat el treball de recerca, hem tingut temps per conèixer i introduir-nos en el món de la proporció àuria i la música, destacant que és un treball del qual se n' havia sentit poc a parlar. He intentat presentar un acurat estudi tècnic i musical des d' un punt de vista tan especialitzat com m'ha estat possible, tot i això, algun apartat d' aquest treball resulta dens, però crec que és l' única manera raonable i seriosa de defensar l' hipòtesi.

Tot aquest recorregut pel món de la música, m' ha comportat un gran estudi fructuós, que m' ha servit per comprovar i reafirmar que les afirmacions sobre la utilització de la proporció àuria per part de certs compositors, sovint salten massa ràpid de números generats per un simple recompte de compassos, notes, etc... en la interpretació. Sens dubte, existeixen pocs dubtes de que en el segle XX en especial es va produir un interès renovat en l'ús dels números en la música. Com a part d'aquest renaixement pitagòric, la proporció àuria també va començar a aparèixer de forma prominent en les obres de diferents compositors. Per tant, la música es pot relacionar amb la proporció àuria, i quina millor manera per demostrar-ho que amb la pròpia composició, on he pogut aplicar la proporció amb un agradable resultat, tot i no ser un gran geni com J.S. Bach.

En aquest treball, la proporció àuria és l' eix central del treball, no només pel seu paper important en el treball, sinó també per la seva sorprenent relació amb la naturalesa. Un nombre matemàtic amb aquesta relació clarament visible i perfecta, m' ha semblat impactant i sorprenent, per això no dono per finalitzat el tema, sinó que em plantejo nous reptes que potser en un futur podré abordar. Em refereixo a una possible nova composició, utilitzant diferents motius o fins i tot a un estudi més ampli sobre la proporció i les seves curiositats infinites.

AGRAÏMENTS

La realització d'aquest treball de recerca s'ha pogut dur a terme gràcies a un conjunt de persones que sempre han estat disposades a ajudar-me.

En primer lloc voldria donar les gràcies al meu professor d'harmonia de l'Escola de Música Municipal de La Selva del Camp, Josep Mateu Pérez, per tot el que s'ha implicat en aquest treball. Ell va ser el principal impulsor, i d'ell em va sorgir l'idea, a més a més, va aportar-me informació i coneixements sobre el món de la composició i l'anàlisi importants per poder tirar endavant el treball.

Agrair a la meva tutora, Adelaida Ibáñez Ferrater, per haver-me guiat en tot moment i per haver-me brindat l'oportunitat de realitzar aquest treball.

A en Prudenci López Galán per ajudar-me en tota la part matemàtica que comporta aquest treball i poder aprendre coses noves sobre aquest tema.

BIBLIOGRAFIA

CORBALÁN, Fernando. *La proporción áurea: El lenguaje matemático de la belleza*. El mundo es matemático. RBA Coleccionables, 2010.

ALLEN PAULOS, John. *Más allá de los números: Meditaciones de un matemático*. 3ª ed. Barcelona: Metatemáticas, 2003.

LIVIO, Mario. *La proporción áurea: La historia de phi, el número más sorprendente del mundo*. Barcelona: Ariel, 2008.

MARINOFF, Lou. *El ABC de la felicidad: Por el autor de Más Platón y menos Prozac*. Barcelona: Zeta Bolsillo, 2007.

F. CORBALÁN i R. BOIX. *Matemàtiques: Sobre les relacions entre matemàtiques i art*. Barcelona: Vicens Vives, 2004.

WEBGRAFIA

http://www.adolphesax.com/index.php?option=com_content&view=article&id=119%3Aanalis-claude-debussy&catid=48%3Asaxofon&Itemid=71&limitstart=5

<http://www.escribircanciones.com.ar/icom-componer-musica/183-icom-componer-musica-y-escribir-canciones-con-propiedades-aureas.html>

<http://www.rtve.es/alacarta/audios/musica-y-significado/musica-significado-bartok-musica-para-cuerda-percusion-celesta-19-02-12/1326923/>

http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/240/La_seccion_aurea_en%20arte.pdf

http://www.educacion.gob.es/externo/ad/es/publicaciones/Aula_Abierta2_Musica.pdf

http://www.march.es/Recursos_Web/Culturales/Documentos/Conciertos/CC577.pdf

http://biblioteca-virtual-antioquia.udea.edu.co/pdf/13/13_1084756332.pdf

<http://en.scorsen.com/S/Sheet+music/Bartok+Strings/-1/1.html>

http://www.youtube.com/watch?v=d_7l-uqz_ic

<http://fibonacci.ucoz.com/index/about/0-2>

<http://fibonacci.ucoz.com/index/ang/0-9>

<http://imslp.org/>

ANNEXOS

PRELUDI N.º 5 EN RE M BWV 850

18

PRAELUDIUM V.

15

BWV 850

A musical score for piano, consisting of six systems of two staves each (treble and bass clef). The music is in 3/4 time and features a complex, rhythmic melody in the right hand and a more rhythmic accompaniment in the left hand. The score is marked with measure numbers 20, 25, 30, and 35. The piece concludes with a double bar line and a fermata over the final chord.

MÚSICA PER A CORDA, PERCUSSIÓ I CELESTA (Primer moviment)

1

**Musik für Saiteninstrumente,
Schlagzeug und Celesta (in 4 Sätzen)**
**Musique pour instruments à cordes,
percussion et célesta (en 4 parties)**

Aufführungsrecht vorbehalten
Droits d'exécution réservés

I.

Béla Bartók

Andante tranquillo, ♩ ca. 116-112

1. 2. Violo *con sord.*
pp 5

3. 4. Vi. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. 8

3. 4. Vi. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. *con sord.*
pp

10

2. Vi. *con sord.*
pp

3. 4. Vi. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. *con sord.*
pp

15

2. Vi. *con sord.*
pp

3. 4. Vi. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. *con sord.*
pp

1. 2. Vcl. *con sord.*
pp

The image shows a musical score for a string ensemble, consisting of six staves: 2. VI. (Violin II), 3.4. VI. (Violins III & IV), 1.2. Vle. (Violae I & II), 1.2. Vlo. (Violae III & IV), and 1.2. Cb. (Cellos I & II). The score is divided into three systems. The first system has measures 7, 9, and 12. The second system has measures 8, 7, and 10. The third system has measures 6, 8, and 6. There are handwritten annotations: 'con sord.' and 'all. rit. rest' in the first system, and a circled '20' in the second system. The score includes various musical notations such as notes, rests, and dynamic markings.

3

25 *con sord.*

1. VI.
2. VI.
3.4. VI.
1.2. Vlc.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.

30

1. VI.
2. VI.
3.4. VI.
1.2. Vlc.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.

Timp.

1. VI.
2. VI.
3.4. VI.
1.2. Vlc.
1.2. Vlc.
1.2. Cb.

4

35

Timp.

1. VI. *senza sord.*

2. VI. *(p)*

3. 4. VI.

1. 2. Vlc. *senza sord.*

1. 2. Vlc. *(p)*

1. 2. Cb. *mf, capr.*

ca 120 - 126

40

Timp.

2. VI. *mf, capr.*

3. 4. VI. *mf, capr.*

1. 2. Vlc. *mf, capr.*

1. 2. Vlc. *mf, capr.*

1. 2. Cb. *mf, capr.*

2. VI. *cresc.*

3. 4. VI. *cresc.*

1. 2. Vlc. *cresc.*

1. 2. Vlc. *cresc.*

1. 2. Cb. *cresc.*

6

55

Er. Tr.

Timp.

1. VI. (non div.)

2. VI. (non div.)

3. 4. VI. (non div.)

1. 2. Vle. (non div.)

1. 2. Vlc. (non div.)

1. 2. Cb. (non div.)

60

1. 2. VI. (non div.)

3. 4. VI. (non div.)

1. 2. Vle. (non div.)

1. 2. Vlc. (non div.)

1. 2. Cb. (non div.)

poco rall.

mf

p

a

65 tempo ca 116 - 112

1. VI.
2. VI.
3. 4. VI.
1. 2. Vle.
1. 2. Vle.
1. 2. Cb.

con sord.
(p)

70

3. 4. VI.
1. 2. Vle.
1. 2. Vle.

con sord.
(p)

con sord.
piu p

7 8 7 8 8 7 8

piu p

piu p

piu p

The image displays a musical score for a string ensemble and cello. The top system, starting at measure 75, features six staves for violins (2.Vl., 3.Vl., 4.Vl., 1.Vlc., 2.Vlc., 1.2.Vlc.) and a cello (Cel.). The violins and cellos play in 12/8 and 8/8 time signatures, while the violas play in 8/8. The bottom system, starting at measure 108, includes the cello and all six string staves. The cello part is marked with a dynamic of *p* and a tempo of *ca. 108*. The string parts are marked with *pp* and include the instruction *con sord.* (with mutes). The score shows complex rhythmic patterns and melodic lines across the instruments.

The image displays two systems of musical notation for a string ensemble. The first system includes parts for Cello (Cel.), Violin I (1. Vl.), Violin II (2. Vl.), Violin III (3. Vl.), Violin IV (4. Vl.), Viola I (1. Vle.), Viola II (2. Vle.), and Violoncello (2. Vlc.). The second system includes parts for Cello (Cel.), Violin I (1. Vl.), Violin II (2. Vl.), Violin III (3. Vl.), Violin IV (4. Vl.), Viola I (1. Vle.), Viola II (2. Vle.), Violoncello I (1.2. Vlc.), and Contrabasso (1.2. Cb.). The notation features various rhythmic patterns, including sixteenth and thirty-second notes, and rests. A box containing the number '80' is positioned above the second system. The dynamic marking 'pp' (pianissimo) is located at the bottom of the second system.

Musical score for strings and cello, showing measures 85-90. The score includes parts for Cello (Cel.), Violins (1. Vl., 2. Vl., 3. Vl., 4. Vl.), Violas (1. Vle., 2. Vle.), and Cellos/Double Basses (1. 2. Vlc., 1. 2. Cb.). The music features complex rhythmic patterns and dynamic markings such as *ppp* and *poco rall.* A rehearsal mark '85' is present in the lower section.

Durée d'exécution ca 8' 30''

COMPOSICIÓ

(Format de partitura: Sibelius 6)

Composició

Miguel Manserger

This musical score is for woodwinds and brass instruments. It includes staves for Flauta (Flute), Oboe, Clarineta (Clarinet), Fagot (Bassoon), Trompa (Trumpet), Trompeta (Trumpet), Trombón (Tuba), and Timbales (Timpani). The score is divided into 12 measures, numbered 1 through 12. The key signature is one flat (B-flat) and the time signature is 2/4. The woodwinds and brass instruments have mostly rests in the first 8 measures, with some activity starting in measure 9. The Timbales part shows dynamic markings of *p*, *mf*, and *ff* across measures 9, 10, and 11.

This musical score is for strings and keyboard instruments. It includes staves for Apsa (Harp), Teclado I (Keyboard I), Guitarra I (Guitar I), Guitarra II (Guitar II), Violín I (Violin I), Violín II (Violin II), Viola, Violonchelo (Cello), and Contrabajo (Bass). The score is divided into 12 measures, numbered 1 through 12. The key signature is one flat (B-flat) and the time signature is 2/4. The strings and keyboard instruments have mostly rests in the first 8 measures, with some activity starting in measure 9. The Violín I, Violín II, Viola, Violonchelo, and Contrabajo parts show a melodic line starting in measure 9.

La proporció àuria i la música

2

Fl

Ob

Cl

Fag

Tmpt

Tbn

Timp

Perc

Perc

00:00:28:19 00:00:31:04 00:00:32:14 00:00:34:00 00:00:35:09 00:00:37:19 00:00:42:04 00:00:45:14 00:00:48:00 00:00:50:09 00:00:52:19

Aug

Tbn I

Tbn II

Vln I

Vln II

Vla

Vcl

Cb

La proporció àuria i la música

3

24 25 26 27 28 29 30 31 32 33

Fl.

Oboe

Cl.

Fag.

Trpa.

Trp.

Tbn.

Timb.

Perc.

Perc.

00:00:55:04 00:00:57:14 00:01:00:00 00:01:02:09 00:01:04:19 00:01:07:00 00:01:09:14 00:01:12:00 00:01:14:09 00:01:16:19

Arpa

Tecl. I

Guit. I

Guit. II

Vln. I

Vln. II

Vla.

Vc.

Cb.

La proporció àuria i la música

The image displays a musical score for a symphony orchestra, organized into two systems. The top system includes the woodwinds (Flute, Oboe, Clarinet, Bassoon), percussion (Tympani, Trumpet, Trombone, Timpani, Percussion), and strings (Violin I, Violin II, Viola, Violoncello, Contrabasso). The bottom system includes the keyboard (Arpa) and guitar (Guitar I, Guitar II). The score is written in a key signature of one flat (B-flat) and a common time signature (C). The woodwinds and strings are active throughout the piece, while the percussion and keyboard instruments have specific, limited parts. The score is annotated with circled numbers (24, 33, 38, 40, 41, 42) and time stamps (00:01:19.04, 00:01:21.14, 00:01:24.00, 00:01:26.09, 00:01:28.19, 00:01:31.04, 00:01:33.14, 00:01:36.00, 00:01:38.09) indicating specific moments in the music.

La proporció àuria i la música

Musical score for woodwinds, percussion, and strings. The score is in 3/4 time and features a key signature of one flat. The instruments shown are Flute (Fl), Oboe (Ob), Clarinet (Cl), Bassoon (Fag), Timpani (Tm), Trumpet (Tpt), Trombone (Tbn), Timpani (Timb), Percussion (Perc), and Percussion (Perc). The score includes measures 43 through 49. The flute part has a melodic line with slurs and accents. The woodwinds and strings provide harmonic support. The percussion parts include a complex rhythmic pattern. Time stamps are provided at the bottom of the score: 00:01:40.19, 00:01:43.04, 00:01:45.14, 00:01:48.00, 00:01:50.09, 00:01:52.19, and 00:01:55.04.

Musical score for strings and other instruments. The score is in 3/4 time and features a key signature of one flat. The instruments shown are Aspa (Asp), Tecl. I (Tecl. I), Guit. I (Guit. I), Guit. II (Guit. II), Vln. I (Vln. I), Vln. II (Vln. II), Vla (Vla), Vc (Vc), and Cb (Cb). The score includes measures 43 through 49. The strings play a harmonic accompaniment. The woodwinds and strings provide harmonic support. The percussion parts include a complex rhythmic pattern. Time stamps are provided at the bottom of the score: 00:01:40.19, 00:01:43.04, 00:01:45.14, 00:01:48.00, 00:01:50.09, 00:01:52.19, and 00:01:55.04.

La proporció àuria i la música

Musical score for woodwinds and percussion. The score includes parts for Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fag.), Snare Drum (Tmpt.), Trumpet (Tpt.), Trombone (Tbn.), and Timpani (Timp.). The score is divided into measures 30 through 38. The woodwinds play a melodic line, while the percussion instruments provide a rhythmic accompaniment. The score is written in a key signature of one flat and a common time signature.

Musical score for strings and other instruments. The score includes parts for Arpa (Arpa), Violin I (Vln. I), Violin II (Vln. II), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabasso (Cb.). The score is divided into measures 30 through 38. The strings play a harmonic accompaniment, while the Arpa and Violin I play a melodic line. The score is written in a key signature of one flat and a common time signature.

La proporció àuria i la música

Musical score for woodwinds and percussion. The score includes parts for Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fag.), Snare Drum (Tmpra), Trumpet (Tpt.), Trombone (Tbn.), Timpani (Timb.), and Percussion (Perc.). The woodwind parts feature melodic lines with circled measure numbers 59 through 66. The percussion parts show rhythmic patterns, with the snare drum and timpani playing a consistent beat. The score is set in a key with one flat and a common time signature.

Musical score for strings and woodwinds. The score includes parts for Aspa (Asp.), Clarinet I (Tecl. I), Clarinet II (Tecl. II), Violin I (Vln. I), Violin II (Vln. II), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabass (Cb.). The woodwind parts feature melodic lines with circled measure numbers 59 through 66. The string parts provide harmonic support with various rhythmic patterns. The score is set in a key with one flat and a common time signature.

La proporció àuria i la música

The image displays a page of a musical score for a symphony orchestra. The score is written in a key signature of one flat (B-flat) and a common time signature (C). The instruments listed on the left side of the score are: Flute (Fl.), Oboe (Ob.), Clarinet (Cl.), Bassoon (Fag.), Timpani (Tmpa.), Trumpet (Tpt.), Trombone (Ton.), Percussion (Perc.), Harp (Apsa.), Violin I (Vln. I), Violin II (Vln. II), Viola (Vla.), Violoncello (Vc.), and Contrabass (Cb.). The score shows measures 67 through 73. The percussion part includes a complex rhythmic pattern. The timecode at the bottom of the page is: 00:02:38.09, 00:02:40.19, 00:02:45.04, 00:02:45.14, 00:02:48.00, 00:02:50.09, 00:02:52.19.

La proporció àuria i la música

The image shows a page of a musical score, numbered 9 in the top right corner. The score is for a symphony orchestra and covers measures 74 through 81. The instruments listed on the left are: Fl (Flute), Ob. (Oboe), Cl. (Clarinet), Fag. (Bassoon), Tmpa. (Timpani), Tpt. (Trumpet), Tbn. (Trombone), Timb. (Timpani), Perc. (Percussion), Arpa (Arpa), Ted. I (Trombone I), Guit. I (Guitar I), Guit. II (Guitar II), Vln. I (Violin I), Vln. II (Violin II), Vla. (Viola), Vcl. (Violoncello), and Co. (Contrabass). The score is written in a key signature of one flat (B-flat) and a common time signature (C). Measures 74 through 81 are circled in the original image. The percussion part shows a complex rhythmic pattern with many sixteenth notes. The string parts are mostly sustained notes with some movement in the lower registers.

La proporció àuria i la música

10

Fl.
Ob.
Cl.
Fag.
Tympana
Tpt.
Tbn.
Timb.
Perc.
Perc.
Apsa
Tecl. I
Guit. I
Guit. II
Vln. I
Vln. II
Vla.
Vc.
Cb.

La proporció àuria i la música

The image displays a page of a musical score, likely for a symphony, featuring multiple staves for various instruments. The instruments listed on the left side of the page are: Fl (Flute), Ob (Oboe), Cl (Clarinet), Fag (Bassoon), Trpt (Trumpet), Trbn (Trombone), Timp (Timpani), Perc II (Percussion II), Perc I (Percussion I), Apg (Apostrophe), Tech I (Tuba), Ouk I (Ouk II), Ouk II (Ouk I), Vln I (Violin I), Vln II (Violin II), Vla (Viola), Vc (Cello), and Cb (Double Bass). The score is written in a standard musical notation with clefs, notes, rests, and dynamic markings. The page is numbered 11 in the top right corner.